EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

19e JAARGANG 1942

Nr. 3, 4

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 1,00 voor het lopende verenigingsjaar (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie voor het jaar 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944 bedraagt *f* 2,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

p, q, $a(x)$, $a(y)$, $b(x)$ door toepassing van genoemde operaties verkrijgen $\sim p$, $\sim q$, $\sim a(x)$, $p \vee q$, $a(x) \vee b(x)$, $p \,\&\, a(x)$, $q \,\&\, \sim b(x)$, $a(x) \rightarrow a(y)$, enz. Aan deze operaties is nu een tweetal nieuwe toegevoegd, de *generalisatie* en de *particularisatie*. De generalisatie (t.o.v. de variabele x) doet $a(x)$ overgaan in $(x)\, a(x)$, de particularisatie (t.o.v. x) in $(Ex)\, a(x)$.

Op de oordeelsvorm $a(x) \vee b(y)$ kunnen we zowel t.o.v. x als t.o.v. y generalisatie of particularisatie toepassen. We krijgen dan o.a. $(x)\, (a(x) \vee b(y))$, $(Ey)\, (a(x) \vee b(y))$, $(Ex)\, (y)\, (a(x) \vee b(y))$.

In tegenstelling tot de in hoofdstuk II besproken „operatoren" $\sim$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$ zijn de „quantificatoren" (x) en (Ex) *niet* onbeperkt toe te passen; immers, het heeft geen zin te schrijven $(x)\, b(y)$ of $(x)\, (x)\, a(x)$ of $(x)\, (Ex)\, a(x)$. Men drukt dit zó uit: men kan (x) en (Ex) slechts toepassen op oordeelsvormen, waarin de variabele x voorkomt, en waarop niet eerder één der operaties (x) of (Ex) is toegepast.

Kan men t.o.v. een variabele nog generaliseren of particulariseren, dan heet die variabele *vrij*, anders *gebonden*. Er is nog een ander onderscheid tussen vrije en gebonden variabelen; blijkbaar betekent $(x)\, a(x)$ precies hetzelfde als $(y)\, a(y)$: men kan dus een gebonden variabele door een andere vervangen. Hierbij moet men echter ten eerste vermijden, dat gegeneraliseerd of geparticulariseerd zou worden t.o.v. een reeds gebonden variabele; zo mag men in $(Ey)\, (x)\, (a(x) \rightarrow b(y))$ de y niet door x vervangen, dáar men dan $(Ex)\, (x)\, (a(x) \rightarrow b(x))$ zou verkrijgen. Ten tweede moet men vermijden, dat een vrije variabele zou overgaan in een gebondene; zo mag men in $(y)\, (a(x) \,\&\, b(y))$ de y niet door x vervangen, daar in $(x)\, (a(x) \,\&\, b(x))$ de x in $b(x)$ niet meer vrij zou zijn.

Er is blijkbaar geen bezwaar tegen, dat men $a(x) \,\&\, (y)\, b(y)$ door $a(x) \,\&\, (x)\, b(x)$ of $(x)\, a(x) \,\&\, (Ey)\, b(y)$ door $(x)\, a(x) \,\&\, (Ex)\, b(x)$ vervangt.

Vervangt men in een oordeelsvorm de eigenschapsvariabelen door bepaalde eigenschappen, de individuele variabelen door bepaalde wezens, dan krijgt men een *oordeel*. De waarheidswaarde van dit oordeel hangt (volgens de definities 1—7) af van de waarheid van zekere singuliere oordelen.

De definities 1—7, die onderscheidenlijk de betekenis van de negatie, de disjunctie, de conjunctie, de implicatie, de generalisatie en de particularisatie vastleggen, vormen omgekeerd tezamen een

partiële definitie van het begrip *waarheid,* daar door middel van deze definities de waarheidswaarde van een ontkennend, disjunctief, copulatief, hypothetisch, algemeen of particulier oordeel is bepaald. Men merke op, dat deze *waarheidsdefinitie* niet tevens een waarheids*kriterium* inhoudt (cf. *Kant,* Kr. d. r. V. 1. Ausg. S. 58). Deze opmerking stelt ons in staat, een strijd te beslechten, die door bezwaren van *Sextus Empiricus* (Pyrrh. hypotyp. II, 194 ss) en van *Stuart Mill* („System of Logic", Book II, Ch. 3) is ontbrand. *Sextus* en *Mill* zijn van gevoelen, dat het een petitio principii inhoudt, wanneer men uit een praemisse van de vorm $(x)\ a(x)$ een conclusie van de vorm $a(x)$ trekt. Immers, vóór men een algemeen oordeel bewezen mag achten, zou men de daarin begrepen singuliere oordelen afzonderlijk hebben aan te tonen, menen zij. Maar deze kritiek houdt geen steek. Inderdaad *betekent* de bewering: „zeker oordeel van de vorm $(x)\ a(x)$ is waar" bij definitie: „elke substitutie voor x in $a(x)$ levert een waar oordeel op". Deze definitie is evenwel geen waarheidskriterium en er zijn dan ook, zoals we nog zullen zien, wel degelijk gevallen, dat men een algemeen oordeel kan bewijzen, zonder eerst de daarin begrepen bijzondere oordelen aan te tonen.

Er zijn ook nu weer oordeelsvormen, die voor *elke* zinvolle substitutie een waar oordeel opleveren. Zo'n oordeel noemen we weer een *tautologie* (van de logica der eigenschappen).

§ 9. Naast die tautologieën en redeneervormen, welke direct voortvloeien uit de tautologieën en de redeneervormen der propositielogica, b.v.

$$(x)\ a(x)\ \vee \sim (x)\ a(x)$$

en

$$\begin{array}{c} (x)\ a(x) \sim (x)\ b(x) \\ (x)\ a(x) \\ \hline (x)\ b(x) \end{array}$$

zijn er andere, welke voortvloeien uit de specifieke betekenis van de generalisatie en de particularisatie. Klaarblijkelijk komt het op hetzelfde neer of men zegt: elk wezen x heeft de eigenschap a, of dat men zegt: er bestaat geen wezen x, dat de eigenschap niet-a heeft. Dus:

$$(x)\ a(x) \equiv \sim (Ex) \sim a(x) \qquad (1)$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\sim (x)\ a(x) \equiv (Ex) \sim a(x) \qquad (2)$$

Gemakkelijk beredeneert men ook

$$(Ex)\ a(x) \equiv \sim (x) \sim a(x) \qquad (3)$$

$$\sim (Ex)\ a(x) \equiv (x) \sim a(x) \qquad (4)$$

Ook:

$$((x)\ a(x)) \rightarrow a(u) \qquad (5)$$

en:

$$a(u) \rightarrow ((Ex)\ a(x)) \qquad (6)$$

zijn tautologieën. De lezer formulere de 10 redeneervormen, die met de genoemde tautologieën corresponderen.

Uit de beide laatstgenoemde tautologieën volgt nog

$$((x)\ a(x)) \rightarrow ((Ex)\ a(x)) \qquad (7)$$

met de bijbehorende redeneervorm. Bij de afleiding van deze tautologie is ondersteld, dat alleen praedicaten zijn toegelaten, die althans voor één wezen zin hebben; immers, zou a voor geen enkel individu een zin hebben, dan zou er geen enkel oordeel $a(u)$ bestaan, en dan zou de afleiding van $(x)\ a(x) \rightarrow (Ex)\ a(x)$ mislukken.

Verder gelden de redeneervormen

$$\frac{p \rightarrow a(u)}{p \rightarrow (x)\ a(x)} \qquad (I)$$

(uit p volgt: een willekeurig wezen u heeft de eigenschap a; dus: uit p volgt: elk wezen x heeft de eigenschap a)
en

$$\frac{a(u) \rightarrow p}{(Ex)\ a(x) \rightarrow p.} \qquad (II)$$

(heeft een of ander wezen u de eigenschap a, dan geldt p; dus: is er een wezen x met de eigenschap a, dan geldt p).

In deze redeneervormen kan men nu voor $a(u)$ een willekeurige oordeelsvorm substitueren, die x als vrije variabele bevat; $a(x)$ wordt dan vervangen door diezelfde oordeelsvorm, waarin eerst x in plaats van u is geschreven; voor p mag men elke oordeelsvorm substitueren, die u *niet* als vrije veranderlijke bevat.

De betekenis van de redeneervormen is de volgende: vervangt men $a, b, \ldots$ door eigenschappen, $p, q, \ldots$ door oordelen, en de vrije variabelen door willekeurige wezens, dan verkrijgt men door toepassing van deze redeneervormen, uitgaande van een waar oordeel steeds weer een waar oordeel; dit vloeit voort uit de definities 1—7.

Hieruit volgt, dat toepassing van de redeneervormen, uitgaande van een tautologie, steeds weer een tautologie oplevert.

In dit verband moet worden opgemerkt, dat, hoewel de redeneervormen (I) en (II) onbeperkt geldig zijn (afgezien dan van de voorwaarde, dat voor p geen uitdrukking mag worden gesubstitueerd, die u als vrije variabele bevat), de uitdrukkingen

$$(p \rightarrow a(u)) \rightarrow (p \rightarrow (x)\ a(x))$$

en

$$(a(u) \rightarrow p) \rightarrow ((Ex)\ a(x) \rightarrow p)$$

geen tautologieën zijn. Om dit in te zien, behoef ik slechts een substitutie aan te geven, waarvoor deze oordeelsvormen overgaan in onware oordelen. Wat het eerste geval betreft, herinner ik aan wat in § 5 is besproken. Zal de implicatie onwaar zijn, dan moet $p \rightarrow a(u)$ waar, $p \rightarrow (x)\ a(x)$ onwaar zijn. Zal $p \rightarrow (x)\ a(x)$ onwaar zijn, dan moet p waar, $(x)\ a(x)$ onwaar zijn. Opdat $p \rightarrow a(u)$ waar is, moet, aangezien p waar is, ook $a(u)$ waar zijn. Ik moet dus de substitutie zó kiezen, dat p en $a(u)$ wáár, maar $(x)\ a(x)$ onwaar is. Nu kies ik voor p de substitutie: Plato heeft Socrates in grote trekken waarheidsgetrouw beschreven; voor $a(x)$: x is een groot man; voor u: Socrates.

De lezer behandele zelf het tweede geval.

De redeneervorm (I) wordt in de wiskunde zeer vaak toegepast. Men wil b.v. een stelling bewijzen, die voor elke driehoek geldt, tekent een willekeurige driehoek en bewijst, dat voor die driehoek het gestelde juist is. Dan heeft men een propositie van de vorm $p \rightarrow a(u)$ bewezen, waarbij p de conjunctie van de axioma's der meetkunde, a het gestelde en u de willekeurig getekende driehoek vertegenwoordigt; p mag de variabele u niet bevatten, dat wil zeggen: men mag bij het bewijs geen beroep doen op de bijzonderheden, die de getekende driehoek vertoont. Nu concludeert men $p \rightarrow (x)\ a(x)$ en daaruit, gebruik makend van de modus ponendo ponens, $(x)\ a(x)$.

Kant heeft deze eigenaardige redeneerwijze in de „Kritik des reines Vernunft", waarschijnlijk voor het eerst, duidelijk gekarakteriseerd. „Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch und dient gleichwohl, den Begriff unbeschadet seiner Allgemeinheit, auszudrücken, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Konstruktion des Begriffs, welchem viele Bestimmungen, z. E. der Grösse der Seiten und der Winkel, ganz

gleichgültig sind, gesehen und also von diesen Verschiedenheiten, die den Begriff des Triangels nicht verändern, abstrahiert wird." Hij beschouwde haar echter als specifiek wiskundig. In de wijsbegeerte kon ze dan ook naar zijn mening niet worden toegepast. „Die philosophische Erkenntnis betrachtet also das besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine nur im Besonderen, ja gar im Einzelnen . . . In dieser Form besteht also der wesentliche Unterschied dieser beiden Arten der Vernunfterkenntniss . . ." (Kr. d. r. V. 1. Ausg. 713/14).

Het is hier niet de plaats om in te gaan op de vragen, die zich verder voordoen. Ik wilde er slechts op wijzen, dat de moderne formele logica de mogelijkheid opent voor een interpretatie en daardoor van een beoordeling, die zich bedient van exacte middelen.

Existentie in de zin van dit hoofdstuk is niet op te vatten als een aan een wezen toe te kennen praedicaat, daar een oordeel van de vorm $(Ex)\ a(x)$ een gebonden individuele variabele bevat. De hier gegeven analyse is dus in overeenstemming met wat *Kant* (Kr. d. r. V. 1. Ausg. S. 592 ff.) over de existentiële oordelen zegt, maar ze betreft slechts oordelen van de vorm „Er bestaat geen Sinterklaas" (waarin „Sinterklaas" een van een wezen te praediceren eigenschap is). In § 24 zullen we ook de oordelen van de vorm „Sinterklaas bestaat niet" (waarin „Sinterklaas" een eigennaam is) bespreken. Daar zullen we ook meer kunnen zeggen over *Descartes'* „cogito ergo sum". Nu moeten we ons met het volgende tevreden stellen; stellen we: *x denkt* voor door $f(x)$ en *ik* door a, dan kunnen we volgens het schema

$$\frac{f(a)}{(Ex)\ f(x)}$$

concluderen: er bestaat een wezen, dat denkt. Dat is ongeveer de uitdrukking „Es denkt", die *Lichtenberg* voor het „cogito" in de plaats wilde stellen.

De moderne logica beschouwt echter niet, als *Kant,* elk existentieoordeel als synthetisch. Immers, het is duidelijk, dat $(x)\ (a(x) \to a(x))$ een tautologie is. Daaruit volgt echter door toepassing van de conclusio ad subalternatam volgens:

$$\frac{(x)\ (a(x) \to a(x))}{(Ex)\ (a(x) \to a(x))}$$

de existentiestelling

$$(Ex)\ (a(x) \rightarrow \bar{a}(x)),$$

die dus ook een tautologie is.

§ 10. *De traditionele syllogistiek.* We zullen nu van de ontwikkelde theorie enkele toepassingen laten zien. De eerste toepassing is de analyse van de traditionele syllogistiek. Deze analyse vangen we aan met het opstellen van twee definities, nl.:

$$\bar{a}(x) \underset{Df}{\equiv} \sim a(x)$$

(„x is niet-sterfelijk" betekent: „het is niet waar, dat x sterfelijk is"), en

$$a \subset b \underset{Df}{\equiv} (x)\ (a(x) \rightarrow b(x))$$

(„de eigenschap b vloeit voort uit de eigenschap a" betekent: „voor elk wezen x geldt: heeft x de eigenschap a, dan heeft x de eigenschap b").

We lezen „$a \subset b$": „alle a's zijn b".

Daarmee hebben we de oordeelsvorm $a\,A\,b$ (gewoonlijk genoteerd: $S\,a\,P$) der traditionele logica in ons systeem ondergebracht. We geven dit in de vorm van een definitie weer en formuleren tegelijk de overeenkomstige definities voor de overige vormen:

$a\,A\,b \underset{Df}{\equiv} a \subset b$ („alle a's zijn b")
$a\,E\,b \underset{Df}{\equiv} a \subset \bar{b}$ („alle a's zijn niet b")
$a\,I\,b \underset{Df}{\equiv} \sim (a \subset \bar{b})$ („sommige a's zijn b")
$a\,O\,b \underset{Df}{\equiv} \sim (a \subset b)$ („sommige a's zijn niet b")
(*Leibniz—Bolzano*).

Uit deze definities volgen de aequivalenties:

$$a\,A\,b \equiv \bar{b} \subset \bar{a}$$
$$a\,E\,b \equiv b\,E\,a$$
$$a\,I\,b \equiv b\,I\,a$$
$$a\,O\,b \equiv \sim (\bar{b} \subset \bar{a}).$$

Nu bestaat de tautologie

$$(a \subset b) \rightarrow ((b \subset c) \rightarrow (a \subset c)).$$

Geldt dus $a \subset b$ en en $b \subset c$, dan geldt ook $a \subset c$, dus geldt $\sim (a \subset c)$ niet. Hieruit volgt het

Principe van Ladd—Franklin. Drie proposities van de vorm $a \subset b$, $b \subset c$, $\sim (a \subset c)$ zijn onverenigbaar, d.w.z. uit elk tweetal volgt de ontkenning van de derde.

We krijgen dus drie fundamentele redeneervormen, namelijk

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ a \subset b & a \subset b & b \subset c \\ b \subset c & \sim (a \subset c) & \sim (a \subset c) \\ \hline a \subset c & \sim (b \subset c) & \sim (a \subset b) \end{array}$$

waarop de gehele syllogistiek berust.

De redeneervorm (1) vertegenwoordigt het dictum de omni: quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis.

Vervangt men in (3) a, b, c opvolgend door $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$ dan krijgt men de redeneervorm:

$$\begin{array}{c} \bar{b} \subset \bar{a} \\ \sim (\bar{c} \subset \bar{a}) \\ \hline \sim (\bar{c} \subset \bar{b}), \end{array}$$

die wegens $a \subset b \equiv \bar{b} \subset \bar{a}$ gelijkwaardig is met (2).

Daar het onze bedoeling is, te onderzoeken, wat het resultaat is, wanneer we voor a, b, c alle mogelijke substituties uitvoeren, behoeven we ons dus om (2) niet te bekommeren. We verwisselen verder in (3) de letters b en c en krijgen dus

$$\begin{array}{c} a \subset b \\ b \subset c \\ \hline a \subset c \end{array} \qquad \begin{array}{c} c \subset b \\ \sim (a \subset b) \\ \hline \sim (a \subset c) \end{array}$$

Nu vervangen we overal a, b, c resp. door a of $\bar{a}$, b of $\bar{b}$ en c of $\bar{c}$; dan ontstaan steeds weer geldige redeneervormen, en wel uit (1):

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{c} a \subset b \\ b \subset c \\ \hline a \subset c \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset c \\ \hline a \subset c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bar{a} \subset b \\ b \subset c \\ \hline \bar{a} \subset c \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bar{a} \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset c \\ \hline \bar{a} \subset c \end{array}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{c} a \subset b \\ b \subset \bar{c} \\ \hline a \subset \bar{c} \end{array} \qquad \text{(II}^a\text{)} \quad \begin{array}{c} a \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset \bar{c} \\ \hline a \subset \bar{c} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bar{a} \subset b \\ b \subset \bar{c} \\ \hline \bar{a} \subset \bar{c} \end{array} \qquad \text{(I}^{a}\text{)} \begin{array}{c} \bar{a} \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset \bar{c} \\ \hline \bar{a} \subset \bar{c} \end{array}$$

uit (3):

$$\text{(III)} \begin{array}{c} c \subset b \\ \sim (a \subset b) \\ \hline \sim (a \subset c) \end{array} \qquad \text{(IV)} \begin{array}{c} c \subset \bar{b} \\ \sim (a \subset \bar{b}) \\ \hline \sim (a \subset c) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bar{c} \subset b \\ \sim (a \subset b) \\ \hline \sim (a \subset \bar{c}) \end{array} \qquad \text{(V)} \begin{array}{c} \bar{c} \subset \bar{b} \\ \sim (a \subset \bar{b}) \\ \hline \sim (a \subset \bar{c}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} c \subset b \\ \sim (\bar{a} \subset b) \\ \hline \sim (\bar{a} \subset c) \end{array} \qquad \begin{array}{c} c \subset \bar{b} \\ \sim (\bar{a} \subset \bar{b}) \\ \hline \sim (\bar{a} \subset c) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bar{c} \subset b \\ \sim (\bar{a} \subset b) \\ \hline \sim (\bar{a} \subset \bar{c}) \end{array} \qquad \text{(VI)} \begin{array}{c} \bar{c} \subset \bar{b} \\ \sim (\bar{a} \subset \bar{b}) \\ \hline \sim (\bar{a} \subset \bar{c}) \end{array}$$

Op grond van het princîpe van *Ladd—Franklin* vinden we dus 16 redeneervormen, die we vervolgens met de 19 modi der 4 traditionele figuren moeten vergelijken. Dan valt aanstonds op, dat de oordeelsvormen $\bar{a} \subset b$ en $\sim(\bar{a} \subset b)$ („alle niet-*a*'s zijn *b*", resp. „sommige niet-*a*'s zijn niet *b*") in de traditionele logica buiten beschouwing worden gelaten; verder is op te merken, dat bij overgang naar de uitdrukkingswijze der traditionele logica (Ia) en (IIa) opv. met (I) en (II) zullen samenvallen. We hebben dus slechts (I)—(VI) in de uitdrukkingswijze der traditionele logica over te brengen.

De conclusie van (I) is van de vorm $S\,A\,P$, waarbij S met a en P met c overeenkomt. Volgens de traditionele logica moet de eerste, de z.g. maior praemisse, altijd het praedicaat, de tweede, de minor, het subject van de conclusie bevatten. We moeten dus de praemissen verwisselen en krijgen, aangezien b met de middenterm overeenkomt:

$$\begin{array}{c} M\,A\,P \\ S\,A\,M \\ \hline S\,A\,P \end{array} \quad \text{(Barbara)}$$

De conclusie van (II) is van de vorm *S E P*, waarbij men naar keuze *S* met *a* en *P* met *c* of *S* met *c* en *P* met *a* kan laten overeenkomen. Ik kies om te beginnen de eerste mogelijkheid, en moet dus de praemissen verwisselen. Dan is de maior naar keuze van de vorm *M E P* of van de vorm *P E M*; de minor kan alleen in de vorm *S A M* geschreven worden. Ik vind dus de syllogismen:

M E P	*P E M*
S A M (Celarent)	*S A M* (Cesare)
S E P	*S E P*

Laat ik in de conclusie *S* met *c* en *P* met *a* overeenstemmen, dan vind ik nog

P A M	*P A M*
S E M (Camestres)	*M E S* (Calemes)
S E P	*S E P*

In (III) vind ik een conclusie van de vorm *S O P*, waarbij *S* met *a* en *P* met *c* overeenkomt. De praemissen staan dus goed en zijn van de vorm *P A M* en *S O M*.

We vinden dus de redeneervorm

P A M
S O M (Baroco)
S O P

Ook in (IV) is de conclusie van de vorm *S O P*, waarbij *a* met *S* en *c* met *P* overeenstemt, zodat de praemissen goed staan. De maior kan naar keuze als *P E M* of *M E P*, de minor als *S I M* of *M I S* worden opgevat, zodat we vier redeneervormen vinden:

P E M	*P E M*
S I M (Festino)	*M I S* (Fresison)
S O P	*S O P*
M E P	*M E P*
S I M (Ferio)	*M I S* (Ferison)
S O P	*S O P*

In (V) hebben we een conclusie van de vorm *S I P*, waarbij men naar willekeur *S* met *a* en *P* met *c* of *S* met *c* en *P* met *a* kan iden-

tificeren. Ik kies om te beginnen de eerste mogelijkheid; de praemissen staan dan goed. Voor de minor kan men naar willekeur *S I M* of *M I S* schrijven, zodat we krijgen

M A P	*M A P*
S I M (Darii)	*M I S* (Datisi)
S I P	*S I P*

Kiest men de tweede mogelijkheid, dan moet men de praemissen verwisselen en de maior luidt *M I P* of *P I M*:

M I P	*P I M*
M A S (Disamis)	*M A S* (Dimatis)
S I P	*S I P*

In (VI) is de conclusie van de vorm *S O P*, waarbij *S* met *c* en *P* met *a* overeenkomt, zodat de praemissen moeten worden verwisseld. De maior luidt dan *M O P*, de minor *M A S*. We krijgen dus:

M O P
M A S (Bocardo)
S O P

Wanneer wij onze resultaten vergelijken met die van de traditionele theorie, dan valt om te beginnen op, dat de modi Darapti, Felapton, Bramantip, Fesapo ontbreken. Hoe is dit te verklaren? Voor de afleiding van al deze modi is de z.g. conversio per accidens vereischt, welke berust op de regel

$$SAP \rightarrow PIS$$

of, in moderne notatie

$$(a \subset b) \rightarrow \sim (\bar{b} \subset \bar{a})$$

Nu is deze regel in ons systeem ongeldig, wat als volgt is in te zien. In ons systeem is „alle *a*'s zijn *b*" gelijkwaardig met: „er is geen *a*, die niet *b* is." Nu is de laatste bewering ten duidelijkste waar, als er geen enkele *a* bestaat. Immers, dan bestaat er a fortiori geen *a*, die niet *b* is. We onderstellen nu, dat er geen enkele *a* bestaat, maar dat er wel *b*'s zijn. Dan is, zoals we juist gezien hebben, *S A P* waar. Maar *P I S*, d.w.z. „sommige *b*'s zijn *a*", kan niet waar zijn. Dan is in de implicatie $a \subset b \rightarrow \sim(\bar{b} \subset \bar{a})$ het implicans waar, het implicaat onwaar, zodat volgens def. 4 van § 3 de implicatie onwaar is.

Bij de traditionele afleiding door middel van een conversio per accidens wordt blijkbaar stilzwijgend ondersteld, dat het algemeen bevestigend oordeel „alle *a*'s zijn *b*." de existentie van minstens één *a* insluit. Dat de moderne logica deze onderstelling laat varen en daardoor de conversio per accidens niet kan toepassen, is hieruit te verklaren, dat vele bewijzen daardoor minder gecompliceerd worden. Het bewijs van elke algemene stelling zou anders een existentiebewijs moeten omvatten. In verband hiermee is het interessant op te merken, dat *Euclides* aan elke definitie een existentiebewijs toevoegt. Daarmee zijn dan alle algemene stellingen gerechtvaardigd, waarin het gedefiniëerde begrip als praedicaat optreedt. Ik kom op deze kwestie nog terug.

Op dezelfde gronden als de conversio per accidens verwerpt de moderne logica de conclusio ad subalternatam, die berust op de niet-geldige regel $(a \subset b) \rightarrow \sim (a \subset \bar{b})$. Ik herinner er aan, dat de regels $(x)\ a(x) \rightarrow (Ex)\ a(x)$, die men óók als conclusio ad subalternatam aanduidt, wel geldt.

Bij onze afleiding komen de reeds door de traditionele logica opgemerkte groepen

Celarent, Cesare, Camestres, Calemes
Festino, Fresison, Ferio, Ferison
Darii, Datisi, Disamis, Dimatis

op natuurlijke wijze te voorschijn. Dit geldt niet voor de groep

Barbara, Baroco, Bocardo.

De onderscheiding van de z.g. 4 figuren is wel een geheel uiterlijke. Celarent, Cesare, Camestres, Calemes, zijn in de grond slechts vier verschillende formuleringen voor één redeneervorm.

De traditionele formele logica kende acht regels waaraan elk syllogisme moest voldoen. In verzen luiden ze:

Terminus esto triplex: major mediusque minorque.
Latius hos quam praemissae conclusio non vult.
Nequaquam medium capiat conclusio oportet.
Aut semel aut iterum medius generaliter esto.
Utraque si praemissa neget, nihil inde sequetur.
Ambae affirmantes nequeunt generare negantem.
Pejorem semper sequitur conclusio partem.
Nil sequitur geminis ex particularibus unquam.

Daar wij echter praemissen toelaten, waarin het subject een ontkenning bevat (cf. *Aristoteles*, de int. 10), krijgen wij uitzonderingen op deze regels. Zo kan het voorkomen, dat twee ontkennende praemissen een conclusie leveren:

$$\begin{array}{l} a \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset \bar{c} \\ \hline a \subset \bar{c} \end{array}$$

Voorbeeld: Geen niet-aziaat is een chinees
Geen deen is een aziaat

Geen deen is een chinees.

De lezer geve andere voorbeelden.

De meest opvallende afwijking van de moderne logica vergeleken bij de traditionele is wel het vervallen van de subalternatie en daardoor van de conversio per accidens, die, zoals we reeds gezien hebben, voortvloeide uit een gewijzigde interpretatie van het algemeen bevestigend oordeel. Deze kwestie lijkt me belangrijk genoeg, om er iets uitvoeriger bij stil te staan.

Het is wel duidelijk, dat het geen zin heeft de vraag te stellen, welke interpretatie de juiste is; het is de vraag, welke opvatting in het wetenschappelijk betoog practisch wordt aanvaard en de aanvaarding van de éne of van de andere interpretatie wordt mede door utiliteitsoverwegingen bepaald. Wij beschouwen de redenering:

alle regelmatige veelvlakken worden door delen van platte vlakken begrensd.
alle 5-vlakken worden door delen van platte vlakken begrensd.

alle regelmatige 5-vlakken worden door delen van platte vlakken begrensd.

Deze conclusie is niet in overeenstemming met de traditionele interpretatie van het algemeen bevestigend oordeel. Immers, deze conclusie zou volgens die interpretatie mede inhouden, dat er regelmatige 5-vlakken zijn.

In de moderne wiskunde is zulk een conclusie echter zeer gewoon. Zij kan b.v. optreden als inleiding tot een betoog, waarvan de slotsom is, dat er geen regelmatige 5-vlakken bestaan.

Eigenlijk ligt de kwestie nog iets dieper: volgens de traditionele

logica kan men van regelmatig 5-vlak niet spreken, zolang niet vaststaat, dat er figuren bestaan met de voor een regelmatig 5-vlak kenmerkende eigenschappen. De definitie:

„Onder pentaeder verstaat men een regelmatig lichaam, begrensd door vijf vlakdelen"

zou dus niet in overeenstemming zijn met de traditionele, van *Aristoteles* afkomstige — althans door hem geformuleerde — opvatting. Men zie hierover Dr. *E. J. Dijksterhuis,* „De Elementen van Euclides", deel I (Groningen 1929), blz. 114/15.

Deze kwestie kwam ter sprake bij de felle debatten, die gedurende de jaren 1904—1906 door *Couturat, Poincaré* en *Russell* (Revue de Métaphysique et de Morale tomes 12, 13, 14; men vindt een groot deel der nog steeds lezenswaardige discussie terug in: *Couturat*: „Les principes de mathématiques", Paris 1905; *Poincaré*: „Science et Méthode", Paris) gevoerd werden.

Een en ander wordt verhelderd, wanneer men onderscheid maakt tussen het geval, waarin men één bepaald object, en het geval, dat men een algemeen begrip — dat wil voor ons op het ogenblik zeggen, een eigenschap — definieert.

Wanneer ik b.v. definieer: onder oppervlakte van een driehoek versta ik *het* getal, dat..., dan ligt in het gebruik van het bepaald lidwoord inderdaad de existentie van zulk een getal opgesloten en een definitie van die vorm vooronderstelt dus een existentiebewijs.

Definieer ik echter: men noemt *een* driehoek gelijkbenig, als... dan ligt daarin volgens de moderne interpretatie niet opgesloten, dat er een gelijkbenig driehoek, zelfs niet, dat er een driehoek is.

§ 11. *De algebraische logica van Boole.* Men kan de probleemstelling, die aan de syllogistiek van *Aristoteles* ten grondslag lag, generaliseren, door in plaats van twee praemissen van de vorm *A, E, I,* of *O* met drie begrippen *S, M, P,* vier of meer praemissen van die vorm voorop te stellen en dan te vragen, welke conclusies men daaruit kan verkrijgen. Ik zal dit vraagstuk niet in zijn algemene gedaante behandelen, doch specialiseer het weer in dier voege, dat alleen praemissen van de vorm *A* en *E* worden toegelaten; het is dan mogelijk, *alle* conclusies van bepaalde vorm aan te geven, die uit die praemissen voortvloeien.

De in de vorige § geformuleerde definities

$$a(x) =_{Df} \sim a(x)$$

$$a \subset b =_{Df} (x) \,.\, a(x) \rightarrow b(x)$$

$$a = b =_{Df} (a \subset b) \;\&\; (b \subset a)$$

blijven van kracht; verder definiëren we $a + b$ en $a \times b$ als volgt:

$$[a + b]\ (x) =_{Df} a(x) \vee b(x)$$

(„x heeft de eigenschap $a + b$" betekent: „x heeft de eigenschap a *of* x heeft de eigenschap b".)

$$[a \times b]\ (x) =_{Df} a(x) \;\&\; b(x)$$

(„x heeft de eigenschap $a \times b$" betekent: „x heeft de eigenschap a *en* x heeft de eigenschap b".)

(Het is misschien goed, erop te wijzen, dat $a \subset b$ en $a = b$ oordeelsvormen, $a + b$ en $a \times b$ praedicaatsvormen zijn.)

Uit deze definities leidt men gemakkelijk af:

1) $a = a \qquad \overline{\overline{a}} = a$

2) $((a = c) \;\&\; (b = d)) \rightarrow (a + b = c + d)$

(ondubbelzinnigheid van de „optelling")

3) $((a = c) \;\&\; (b = d)) \rightarrow (a \times b = c \times d)$

(ondubbelzinnigheid van de „vermenigvuldiging")

4) $a + b = b + a$ comm. $+$

5) $a \times b = b \times a$ comm. $\times$

6) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ass. $+$

7) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ass. $\times$

8) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ distr. $\times$

9) $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ distr. $+$

Op grond van 6) en 7) kunnen we i.p.v. $(a + b) + c$ en van $a + (b + c)$ voortaan $a + b + c$, i.p.v. $(a \times b) \times c$ en van $a \times (b \times c)$ voortaan $a \times b \times c$ schrijven. Verder schrijven we in plaats van $a \times b$ eventueel ab, in plaats van $a + (b \times c)$ eventueel $a + b \times c$ of $a + bc$, alles overeenkomstig de schrijfwijze der „gewone" algebra.

Verder bewijst men

10) $a \subset a$

11) $a \subset a + b$

12) $a\,b \subset a$

13) $((a \subset b) \& (b \subset c)) \rightarrow (a \subset c)$ trans. $\subset$

14) $((x \subset a) \& (x \subset b)) \equiv (x \subset ab)$

15) $((a \subset x) \& (b \subset x)) \equiv (a + b \subset x)$

16) $a + ab = a$ (uit 10), 11), 12), 15)) } abs.

17) $a\,(a + b) = a$ (uit 10), 11), 12), 14)) } abs.

18) $a + a = a$ } taut.

19) $aa = a$ } taut.

De relatie $\subset$ vertoont analogie met de relatie $\leqq$ uit de „gewone" algebra (cf. 10), 11) 12)). In verband daarmee kunnen de regels 14) en 15) verwondering wekken; men zou immers eerder verwachten:

$$((x \subset a) \& (x \subset b)) \equiv (x \times x \subset ab)$$
$$((a \subset x) \& (b \subset x)) \equiv (a + b \subset x + x).$$

Deze regels zijn inderdaad juist, maar op grond van 18) en 19) gelijkwaardig met 14) en 15).

Verder geldt:

$$a \times \bar{a} = b \times \bar{b}$$
$$a + \bar{a} = b + \bar{b}$$

We zijn daarom gerechtigd, de volgende definitie te formuleren:

$$a \times \bar{a} \underset{Df}{\equiv} 0$$
$$a + \bar{a} \underset{Df}{\equiv} 1.$$

Hieruit volgt aanstonds

20) $a \times 0 = 0$ 21) $a + 0 = a$

$a \times 1 = a$ $a + 1 = 1$

22) $o \subset a \subset 1$

Nu geldt ook:

23) $(a \subset b) \equiv (a\bar{b} = 0)$

24) $(a \subset b) \equiv (\bar{a} + b = 1)$

25) $(a = 1 \,\&\, b = 1) \equiv (ab = 1)$

26) $(a = 0 \,\&\, b = 0) \equiv (a + b = 0)$

Tenslotte maken we gebruik van

27) $\overline{(a + b)} = \bar{a}\,\bar{b}$

28) $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

Dit stelsel regels stelt ons nu in staat, het aan 't begin dezer § gestelde probleem op te lossen.

Ik wil dit laten zien aan de hand van enkele voorbeelden.

I. Allereerst beschouw ik het stelsel praemissen, dat aan de redeneervorm Barbara ten grondslag ligt:

$$a \subset b$$
$$b \subset c$$

Volgens regel 23) kunnen we hiervoor schrijven

$$a\bar{b} = 0 \qquad\qquad b\bar{c} = 0$$

volgens regel 26)

$$a\bar{b} + b\bar{c} = 0,$$

volgens regel 20)

$$a\bar{b} \times 1 + 1 \times b\bar{c} = 0,$$

volgens de definitie van 1

$$a\bar{b} \times (c + \bar{c}) + (a + \bar{a}) \times b\bar{c} = 0,$$

en tenslotte volgens regel 8)

$$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0.$$

Volgens regel 26) krijgen we nu het volgende stelsel conclusies:

$$a\bar{b}c = 0; \quad a\bar{b}\bar{c} = 0; \quad ab\bar{c} = 0; \quad \bar{a}b\bar{c} = 0;$$
$$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} = 0; \quad a\bar{b}c + ab\bar{c} = 0; \quad a\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} = 0;$$
$$a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = 0; \quad a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0; \quad ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0;$$
$$a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0$$
$$a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0$$
$$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0$$
$$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = 0$$
$$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = 0.$$

Ik bespreek alleen de achtste gevolgtrekking:

$$a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = 0$$

Deze wordt volgens regel 8) herleid tot

$$a\bar{c}\,(b + \bar{b}) = 0,$$

daarna net als zoeven tot

$$a\bar{c} = 0,$$

en tenslotte volgens regel 23) tot

$$a \subset c,$$

de gangbare conclusie.

II. De lezer herleide het stelsel praemissen

$$\bar{a} \subset \bar{b}, \quad a \subset c, \quad c \subset b$$

tot de vergelijking

$$\bar{a}\, b c + \bar{a}\, b\, \bar{c} + a b\, \bar{c} + a\, \bar{b}\, \bar{c} + a \bar{b}\, c + \bar{a}\, \bar{b}\, c = 0$$

en ontwikkele daaruit de conclusie:

$$a = b, \qquad b = c, \qquad c = a.$$

§ 12. Tenslotte behandel ik, in ingeklede vorm, het z.g. „probleem van *Venn*", dat ik als volgt kan formuleren: in een dorp bestaat een sportclub, waarvan alleen wielrenners en voetballers lid kunnen zijn; geen lid mag beide sporten beoefenen; alle voetballers in het dorp zijn lid; wat kan men hieruit concluderen?

Ik breng het vraagstuk als volgt in vergelijking:

$a(x)$ betekent: x is lid van de sportclub
$b(x)$ „ x is voetballer
$c(x)$ „ x is wielrenner

(a, b en c duiden dus nu geen praedicaatsvariabelen, maar bepaalde praedicaten aan).

Alle leden van de sportclub zijn, hetzij voetballers en geen wielrenners, hetzij wielrenners en geen voetballers, dus

$$a \subset b\, \bar{c} + \bar{b}\, c.$$

Alle voetballers op het dorp zijn clublid, dus

$$b \subset a.$$

We kunnen deze praemissen op de bekende wijze herleiden tot:

$$a\, b\, c + a\, \bar{b}\, \bar{c} + \bar{a}\, b\, c + \bar{a}\, b\, \bar{c} = 0.$$

Tellen we de triviale conclusie $0 = 0$ en de zojuist verkregen uitdrukking mee, dan zijn 16 conclusies mogelijk. Een enkele conclusie wil ik noemen, nl.

$$a\, b\, c + \bar{a}\, b\, c = 0,$$
$$b\, c \quad = 0.$$

Er is niemand op het dorp, die zowel voetballer als wielrenner is.

Men kan ook het omgekeerde vraagstuk behandelen: uit welke *gronden* kunnen de vooropgestelde feiten voortvloeien? Daartoe moet men de praemissen niet „op 0", doch „op 1" herleiden, gebruik makend van regel 24). Als voorbeeld kies ik de gegevens van het probleem van *Venn*:

$$a \subset b\bar{c} + \bar{b}c$$
$$b \subset a$$

We herleiden dit volgens regel 24) tot:

$$\bar{a} + b\bar{c} + \bar{b}c = 1; \qquad \bar{b} + a = 1$$

en kunnen deze vergelijkingen volgens regel 25) samenvatten in:

$$(\bar{a} + b\bar{c} + \bar{b}c) \times (\bar{b} + a) = 1$$
$$\bar{a}\bar{b} + \bar{a}a + b\bar{c}\bar{b} + b\bar{c}a + \bar{b}\bar{b}c + \bar{b}ca = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}c = 1.$$

Nu *kan* deze laatste vergelijking volgens regel 21) voortvloeien uit:

$$\bar{a}\bar{b}c = 1; \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 1; \quad ab\bar{c} = 1; \quad a\bar{b}c = 1;$$
$$\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 1; \quad \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c} = 1; \quad \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = 1; \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c = 1; \quad ab\bar{c} + a\bar{b}c = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}c = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c} + a\bar{b}c = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = 1$$
$$\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}c = 1.$$

Voegen we hierbij de triviale vergelijking $0 = 1$, dan vinden we 16 *mogelijke gronden* voor onze praemisse. Een enkele dezer mogelijke gronden wil ik in termen van het probleem interpreteren:

De vergelijking $\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c = 1$ is gelijkwaardig met:

$$\bar{a} + ac = 1. \qquad \bar{b} = 1, \text{ dus } b = 0.$$

M.a.w.: alle dorpelingen zijn hetzij niet-clublid, hetzij clublid en wielrenner; er is geen enkele voetballer op het dorp.

§ 13. Het zal duidelijk zijn, dat het besproken procédé van herleiding ons niet *alle* gevolgtrekkingen en niet *alle* mogelijke gronden levert, doch alleen de gevolgtrekkingen en mogelijke gronden van bepaalde vorm.

Een noodzakelijke gevolgtrekking, die ons procédé echter niet levert, zal zijn: is de notaris van het dorp lid van de sportclub, maar geen wielrenner, dan is hij voetballer. En een door ons procédé niet geleverde mogelijke grond is de volgende: alle voetballers op het dorp hebben gezamenlijk de sportclub opgericht en hebben besloten, verder alleen wielrenners als lid toe te laten.

Het besproken procédé van oplossing, afkomstig van *Poretzky,* heeft indertijd gegolden als voorbeeld van wat als einddoel van de logistiek moest gelden en van wat van de logistiek te verwachten was. Wij weten tegenwoordig, dat datgene, wat een vroegere generatie wel van de logistiek verwachtte: een algorithmus, die als het ware mechanisch alle mogelijke problemen zou helpen oplossen, ja de constructie van een soort rekenmachine, van een „logische piano" (*Jevons*), die ons het denken zou besparen, illusie is geweest en illusie zal blijven.

Dergelijke illusoire doelstellingen en verwachtingen zijn het intussen geweest, die bij velen, vooral bij philosophen, een diepe tegenzin tegen de logistiek hebben verwekt. Het gevolg hiervan was een bestrijding van de logistiek, die ik door enkele citaten wil karakteriseren:

„Das Leben, das uns die logischen Probleme stellt, ist nicht nur ein Kombinationsspiel mit bunten Steinen und die Wirklichkeit keine Briefmarkensammlung im grossen. Mit dem blossen Beieinander von Elementen finden wir keine Antwort auf die Fragen, die uns mit uns selbst und unserer Weltverflochtenheit in Raum und Zeit aufgegeben sind" (*Brunstäd,* „Logik", München—Berlin 1933, S. 83).

„.... la Logistique .... se propose de *dispenser de penser,* d'éviter les opérations rationnelles et proprement *logiques* telles que distinction, argumentation, etc., et de *supprimer* toute difficulté dans le raisonnement par une algèbre, d'ailleurs excessivement compliquée, que l'intelligence n'aurait qu'à appliquer" (J. Maritain, „Petite logique[11]", Paris 1933, p. 264).

„.... l' *algèbre de la Logique* se rapporte à un certain art de substituer au travail rationnel le mandement réglé de signes idiographiques (Logistique), discipline dont les fondements sont en eux-mêmes absolument étrangers à la Logique véritable, ou art du travail rationnel, et relèvent en fait, chez la plupart des Logisticiens, d'une conception générale („Logique de la Relation") destructive d'une saine philosophie du raisonnement" (l.c. p. 339).

Deze uitlatingen zijn blijkbaar op te vatten als reacties op de verwachtingen, die een vorige generatie van logistici koesterde, verwachtingen, die voor verwezenlijking niet vatbaar zijn gebleken, maar welker verwezenlijking ook geen voorwaarde is voor het bestaansrecht der formele logica. De logistiek, de moderne formele

logica, is niet bedoeld als een hulpmiddel om het denken overbodig te maken; ze beoogt het stelselmatig onderzoek naar de vormen van de strenge redenering.

Men houde in het oog, dat dus niet het denken, of zelfs het juiste denken in zijn gehele omvang, voorwerp van onderzoek is voor de formele logica; de formele logica houdt zich slechts bezig met de strenge redenering, die in het algemeen eerst optreedt als afsluiting van een meer omvangrijk denkproces. Naast de redeneervormen der formele logica bestaat er een grote verscheidenheid van andere denkvormen, welker waarde niet is gelegen in hun betekenis als element in een streng betoog, maar in hun vruchtbaarheid als hulpmiddel om datgene op het spoor te komen, wat dan later als slotsom van een sluitend betoog wordt afgeleid.

Een echte *ars inveniendi* zou al die denkvormen in samenhang moeten beschrijven. Maar de opbouw van zulk een ars inveniendi stuit op twee grote bezwaren. Ten eerste vinden de door haar te onderzoeken denkvormen niet, zoals de vormen der strenge redenering, in de wetenschappelijke litteratuur hun uitdrukking. In de wetenschappelijke litteratuur vinden we over het algemeen slechts het eindresultaat, dat is het sluitend betoog.

Ten tweede hebben die denkvormen, veel meer dan de vormen der strenge redenering, een persoonlijk karakter. Dit is met hun functie natuurlijk in overeenstemming.

Het behoeft ons dan ook niet te verwonderen, dat omtrent de denkvormen, voorzover ze onderscheiden zijn van de door de formele logica bestudeerde vormen der strenge redenering, niet zo heel veel bekend is. Ik noem als voorbeeld van zulk een denkvorm de z.g. *redenering door analogie.*

Het onderzoek van de hier aangeduide klassen van denkvormen kan niet zonder meer aan de psychologie worden toegewezen [1]). Want dit onderzoek zal zich niet kunnen bepalen tot de blote beschrijving van de denkvormen in kwestie; het zal hebben te treden in een beoordeling van die denkvormen naar de logische houdbaarheid van hun eindresultaat en in een onderzoek naar de voorwaarden

---

[1]) Men zie voor psychologisch onderzoek op dit gebied: *O. Selz,* „Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums" („Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs", II. Teil), Bonn 1922, i.h.b. S. 128, Ss. 281 ff. Aldaar ook interessante opmerkingen van principiëlen aard.

van hun toepassing. Veel van wat de traditionele logica onder het hoofd „methodenleer" behandelde, hoort in deze gedachtengang thuis. Ook *Descartes'* „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison" en zijn „Regulae ad directionem ingenii", waarvan reeds de titels veelzeggend zijn.

Er is nog een probleemstelling, die met die van de formele logica veel punten van overeenstemming vertoont, maar die daarvan toch dient te worden onderscheiden. De formele logica leert ons, kort uitgedrukt, uit zekere waarheden, die vooropgesteld zijn, andere waarheden als gevolgtrekking afleiden. Het spreekt echter vanzelf, dat van tijd tot tijd oordelen als waar zullen moeten worden gesteld, zonder dat de waarheid van die oordelen op grond van een strenge redenering kan worden bewezen.

Het zal duidelijk zijn, dat het stellen van dergelijke oordelen, die als uitgangspunt der redenering voorop worden gesteld, niet aan willekeur is overgelaten; was dit zo, dan zou het redeneren immers generlei zin hebben. Er moeten dus regels zijn, volgens welke dergelijke oordelen worden beoordeeld, en die regels vormen een noodzakelijke aanvulling van de regels, die de formele logica ons levert.

§ 14. Tenslotte voor den lezer nog een probleem ter uitwerking. Uit de praemissen $a \subset b$, $b \subset c$, $c \subset d$ vloeit de conclusie $a \subset d$ voort. De oordelen $a \subset b$, $b \subset c$, $c \subset d$, $\sim (a \subset d)$ zijn dus onverenigbaar. Welke redeneervormen vloeien uit deze opmerking voort?

§ 15. In de „gewone" algebra staan naast optelling en vermenigvuldiging de „omgekeerde bewerkingen", aftrekking en deling. Onder $b - a$ verstaat men dan de oplossing van de vergelijking:

$$a + x = b,$$

en deze definitie heeft dus slechts zin bij die waarden van a en b, waarvoor deze vergelijking één en slechts één oplossing toelaat. Hoe staat het hiermee in het geval van de algebra der logica? Uit $a + x = b$ volgt op grond van regel 11) : $a \subset b$, zodat deze vergelijking alleen voor $a \subset b$ een oplossing toelaat. Er is dan echter zeker een oplossing en wel $\bar{a}\, b$. Aangezien volgens onderstelling $a \subset b$, dus $a\,\bar{b} = 0$, krijgen we immers:

$$a + \bar{a}\,b = a\,(b + \bar{b}) + \bar{a}\,b = a\,b + a\,\bar{b} + \bar{a}\,b =$$
$$= a\,b + \bar{a}\,b = (a + \bar{a})\,b = b.$$

Maar dit is niet de enige oplossing. Substitueren we immers voor x de waarde $\bar{a} b + p a + q b$, dan krijgen we:

$$a + p a + \bar{a} b + q b = a + \bar{a} b + q b =$$
$$= a b + a \bar{b} + \bar{a} b + q b = b + q b = b,$$

(hierbij is tweemaal gebruik gemaakt van regel 16)). Dus voldoet ook $p a + \bar{a} b + q b$ bij elke keuze van de eigenschappen p en q aan de vergelijking. Het is derhalve niet mogelijk, de uitdrukking $b - a$ naar analogie van de „gewone" algebra te definiëren.

Een overeenkomstig negatief resultaat vinden we, als we de deling trachten in te voeren. De vergelijking

$$a x = b$$

laat voor $b \subset a$ (d.w.z. $\bar{a} b = 0$) elke uitdrukking van de vorm $a b + p \bar{a} + q b$ als oplossing toe.

Dit resultaat bewijst de ondeugdelijkheid van een soms toegepaste methode om door abstractie van een bepaald kenmerk uit een bepaald begrip een ruimer begrip te verkrijgen. Zo meent men wel eens, het begrip *redelijk* te kunnen verkrijgen, door van het begrip *mens* uit te gaan en dan van het kenmerk *dier* te „abstraheren". Een wezen is een mens, begint men dan op te merken, wanneer het een dier is, en bovendien de — nog nader te bepalen — eigenschap bezit, die den mens van de overige dieren onderscheidt. Dus:

$$m = d x.$$

De te bepalen eigenschap, aangeduid door de letter x, is door een dergelijke vergelijking echter geenszins voldoende bepaald.

Verder is uit het bovenstaande af te leiden, waarom de pogingen van *Leibniz,* alle begrippen tot zekere meest primitieve te herleiden, tot geen ondubbelzinnig bepaald resultaat leidden.

INGEKOMEN BOEKEN.

P. WIJDENES in overleg met A. A. D. BOUWHOF en J. C. LAGERwerff, Algebra voor examens in Handelsrekenen M.O. KXII, Accountancy en Staatspractijkexamen, **2de druk,** 166 blz. *f* 2,90, gebonden *f* 3,40.

Ir. W. C. COEPYN, De rekenmethode „Cross", Handleiding voor het onderwijs aan Middelbaar Technische Scholen en voor zelfstudie, *f* 1,35.

P. WIJDENES, Algebra voor M.U.L.O. II B, **14e druk,** 236 blz., *f* 2,25.

P. WIJDENES, Logarithmen- en Sinustafel H **2e druk**. Deze tafel bevat de gewone logarithmen en de goniometrische verhoudingen in 4 dec., in het bijzonder voor de nieuwe leerstof voor het diploma M.U.L.O. B, 55 blz., gec. *f* 0,65.

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN

van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

Verslag van de Algemeene Vergadering van Wimecos
(29 Dec. 1942).

In de op 29 December j.l. te Utrecht gehouden vergadering werden de notulen van de vorige vergadering, het jaarverslag en het financieel verslag goedgekeurd.

De contributie voor het volgende vereenigingsjaar, loopend van 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944 werd op *f* 2,50 vastgesteld.

Dr. H. H. Buzeman werd als penningmeester herkozen.

De keuze van de plaats voor de volgende Algemeene Vergadering werd aan het Bestuur overgelaten.

De penningmeester werd op voorstel van de commissie, belast met het nazien van de financieele rekening, gedechargeerd.

In de middagvergadering hielden Prof. Dr. Barrau en Dr. Vredenduin hun aangekondigde voordrachten, waarvan de verslagen in Euclides worden opgenomen.

Bij de rondvraag werd het Bestuur verzocht, nadere inlichtingen over bepaalde punten van het Eindexamenprogramma voor 1943 in te winnen. De beantwoording der gestelde vragen vindt men op de volgende bladzijde opgenomen.

De Secretaris, J. J. Tekelenburg.

CONTRIBUTIEBETALING.

De Penningmeester verzoekt hun, die de contributie voor het jaar, loopend van 1 September 1942 t/m 31 Augustus 1943, nog niet hebben betaald, deze alsnog door storting van *f* 1,— op de postgirorekening van de Vereeniging van Wiskundeleeraren, Amsterdam, no. 143917, te voldoen. Het omslachtige innen per postkwitantie en de extra kosten daarvan kunnen dan worden voorkomen. De contributie voor het jaar, loopend van 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944, is op *f* 2,50 vastgesteld.

De Penningmeester, H. H. Buzeman.

INLICHTINGEN OP VRAGEN

die op de laatste Algemeene Vergadering betreffende het Eindexamen-programma voor Wiskunde voor 1943 gesteld zijn.

Op de laatste Algmeene Vergadering is aan het Bestuur verzocht,

nadere inlichtingen in te winnen over een aantal punten, die men in het Besluit, dat de nieuwe eindexamenregeling bevat, niet duidelijk genoeg vond aangegeven. In verband daarmede heeft het Bestuur zich tot den Heer van Andel gewend, die zoo bereidwillig is geweest, de verschillende kwesties nader te verduidelijken, waarvoor hem hier hartelijk dank zij gezegd.

Vraag 1 betreffende kegel en cylinder bij de Beschrijvende Meetkunde.

Het niet meer met name noemen van kegel en cylinder bij dit vak moet zoo uitgelegd worden, dat bij de vraagstukken van de Beschrijvende Meetkunde wel de kennis van kegel en cylinder, zooals die bij de Stereometrie is opgedaan, bekend wordt verondersteld. Er zullen geen vraagstukken gegeven worden, waarbij men van een kegel of cylinder *uitgaat.* Wel kan men dus constructies verwachten van hoeken tusschen lijnen en vlakken in opgaven, waarin gebruik gemaakt wordt van kegels, welker beschrijvende lijnen de meetkundige plaats vormen van de lijnen, die door een gegeven punt gaan en met een gegeven vlak een gegeven hoek maken; eveneens opgaven, waarin gebruik gemaakt wordt van cylinders, waarvan de punten raakpunten zijn van lijnen, die de as op een gegeven afstand kruisen.

Vraag 2 over het al of niet gevraagd worden van logarithmische vergelijkingen.

De exponentieele vergelijkingen worden niet gevraagd. In verband daarmede zal dus geen logarithmische vergelijking worden opgegeven, waarbij de onbekende (al of niet als log x) in een exponent voorkomt. De overige logarithmische vergelijkingen blijven dus gehandhaafd.

Vraag 3 betreft het besnoeien van oppervlakte- en inhoudsberekeningen bij de bol en deelen van de bol.

Het antwoord hierop luidt, dat dit de laatste jaren reeds doorloopend is geschied. Men vergelijke de opgaven van omstreeks 1915 met die van de laatste jaren!

Vraag 4 aangaande de Meetkunde op de Bol.

De boldriehoek behoeft niet afzonderlijk behandeld te worden. De cirkel van Lexell en de oppervlakte van de boldriehoek kunnen dus buiten beschouwing blijven. Wel worden de eigenschappen van de gewone drievlakshoek bij de boldriehoek bekend verondersteld.

OVER HET VERBAND TUSSCHEN MATHEMATISCHE EN MUZIKALE BEGAAFDHEID

DOOR

Prof. Dr. G. RÉVÉSZ.

Inleiding.

Zoowel in de wetenschappelijke literatuur als bij ontwikkelde leeken komen wij vaak de meening tegen, dat er tusschen mathematische en muzikale begaafdheid een positieve correlatie bestaat, dat het aantal muzikaal gedisponeerde mathematici dat der muzikaal aangelegde personen op andere wetenschappelijke gebieden ver overtreft. De opvatting, dat er inderdaad een correlatie bestaat, schijnt zoo diep in het collectieve bewustzijn doorgedrongen te zijn, dat oogenschijnlijk niemand behoefte gevoelde, dat zoogenaamde verband tusschen de beide vormen van begaafdheid empirisch, langs statistischen weg te controleeren. Daar nu deze meening sedert ongeveer tweehonderd jaar door mathematici, philosophen en psychologen, zonder dat zij haar nauwkeurigheid onderzochten, verkondigd werd, [1]) leek het mij, dat de tijd eindelijk gekomen was om te onderzoeken, of deze these inderdaad wel houdbaar is.

Bij de aangenomen relatie tusschen mathematische en muzikale begaafdheid beperkt men zich tot de bewering, dat mathematici van nature een muzikalen aanleg bezitten, welke gemiddeld hooger is dan die van wetenschappelijke werkers op andere gebieden. (Dat ook het aantal der mathematisch begaafde musici grooter zou zijn dan dat der overige mathematisch begaafde kunstenaars is echter nog nooit door iemand beweerd). De feiten, waarop de eerstgenoemde bewering gebaseerd is, zijn absoluut onvoldoende. Men wijst met bijzonderen nadruk op muzikaal begaafde mathematici, op hen, die behoorlijk een instrument bespelen, een levendige belangstelling voor muziektheoretische vraagstukken aan den dag

---

[1]) Vermeldenswaard is het, dat van alle bij onze enquête medewerkende mathematici en physici 27 % zich voor het bestaan van een relatie tusschen mathematische en muzikale begaafdheid uitgesproken hebben.

leggen enz. enz. Zonder eenigen twijfel zouden die zelfde zegslieden ook in staat zijn een aantal mathematici op te noemen, die totaal onmuzikaal zijn. Het is opmerkelijk en het spreekt in elk geval niet ten gunste van de juistheid der these, dat geen enkele beroemde mathematicus, als creatief of reproductief musicus bekend geworden is. P. J. Moebius, die in zijn werk over den mathematischen aanleg (1900) een aantal eminente mathematici en mathematische physici bespreekt, heeft onder 16 beroemde mathematici (Ampère, Bessel, Wolfgang und Johann Bolyai, Carnot, Clairaut, de Condorcet, Eisenstein, L. Euler, Fourier, Fresnel, Galileï, Gauss, Huygens, Monge, Poisson) er slechts 6 gevonden, van wie men met eenige waarschijnlijkheid mag aannemen, dat zij althans tot de middelmatig muzikalen behoorden. Onder 16 andere beroemde mathematici (Cantor, Cardano, Herschel, Helmholtz, Hilbert, Jacobi, Kepler, F. Klein, Leibniz, Lorentz, Maupertuis, Minkowski, Plank, Poincaré, Weber, Weierstrass) vond ik er slechts 5 (Cardano, Helmholtz, Herschel, Jacobi, Maupertuis) bij wie zulks het geval was; alle anderen gaven geen blijk van muzikaliteit en sommigen van hen waren zelfs geheel onmuzikaal. Het is zeker, dat een dergelijke onsystematische wijze van behandeling van het probleem nooit tot een bevredigend resultaat kan leiden. Wat hier ontbreekt is betrouwbaar statistisch materiaal en daarover beschikken wij nog niet.

Het door Haecker en Ziehen verzamelde statistische materiaal houdt geen direct verband met ons probleem, maar met het vraagstuk, tot op welke hoogte muzikale aanleg met mathematische begaafdheid correleert [1]). De beide onderzoekers onderzochten 227 mannen en 142 vrouwen met een duidelijk muzikalen aanleg, en daarnaast 72 mannen en 90 vrouwen zonder muzikale begaafdheid. Bij deze personen vonden zij de volgende correlatie tusschen muzikale en mathematische begaafdheid:

Muzikaliteit	Mathematische begaafdheid			
	Mannen		Vrouwen	
Bij de positieve gevallen . .	5	(2%)	2	(1%)
Bij de negatieve gevallen . .	9	(13%)	0	(0%)

[1]) V. Haecker und Th. Ziehen. Zur Vererbung und Entwicklung der Musikalischen Begabung. Leipzig, 1932.

Het aantal onderzochte positieve en negatieve gevallen is te klein. Wel blijkt duidelijk, dat er bij de mannelijke muzikaal niet begaafde individuen juist een hooger percentage mathematische begaafdheid voorkomt dan bij de muzikaal begaafden (13 % tegenover 2 %). Het resultaat van dit statistisch onderzoek pleit dus uitdrukkelijk tegen de opvatting, dat er tusschen de muzikale begaafdheid en de mathematische dispositie een positieve relatie bestaat; juist het tegenovergestelde was het geval.

Tot hetzelfde resultaat kwamen Heymans en Wiersma bij hun herediteitsenquête. Zij vonden, dat van degenen, die volgens deze enquête als zeer muzikaal golden (in totaal 52 personen), slechts 15,4 % mathematisch talent bezat, terwijl wanneer men deze groep vermeerdert met de muzikalen in den ruimeren zin, men op een totaal van 423 personen slechts 12,3 % aantrof.

H. J. en W. A. Pannenborg hebben deze resultaten vergeleken met een eigen biographisch onderzoek en met de gegevens der schoolenquête van Heymans. Het biographisch onderzoek, zich uitstrekkende over 21 bekende componisten, leverde een negatief resultaat. Ook de schoolenquête bracht geen bevestiging van de these der correlatie tusschen muzikale en mathematische begaafdheid. Deze enquête betrof 3860 kinderen, van wie er 494 als muzikaal werden aangeduid, en wel 342 jongens en 152 meisjes. Het bleek, dat van de muzikale jongens 16,4 % vaardigheid bezat in het oplossen van wiskundige vraagstukken, van de muzikale meisjes 11,2 %; over de geheele groep van muzikale jongens en meisjes te zamen genomen was het percentage 15,9 %, een cijfer, dat met het hierboven genoemde van Heymans en Wiersma voortreffelijk overeenstemt. [1])

Feis [2]), in zijn studie over de genealogie der musici, kwam eveneens tot een negatieve conclusie.

Aangezien deze ervaringen geen antwoord geven op de vraag naar het verband tusschen mathematischen en muzikalen aanleg en aan den anderen kant de meening zeer verbreid is, dat een dergelijk verband inderdaad bestaat, besloot ik het probleem met behulp van

---

[1]) H. J. und W. A. Pannenborg. Die Psychologie des Musikers. Z. f. Psych. 73, 1915.

[2]) O. Feis. Studien über die Genealogie und Psychologie der Musiker, 1910.

een omvangrijk statistisch onderzoek aan te pakken in de hoop, het daardoor definitief te kunnen oplossen.

De enquête.

In het begin van het jaar 1942 zonden wij aan een groot aantal Nederlandsche mathematici en physici (394) het nevenstaande vragenformulier met het verzoek dit zoo nauwkeurig mogelijk in te vullen [1]).

Psychologisch laboratorium der Universiteit van Amsterdam.

ENQUÊTE OVER MUZIKALITEIT.

AMSTERDAM-C, datum postmerk.
Keizersgracht 613.

L. S.,

Het is een gangbare opvatting, ook onder mathematici, dat er tusschen muziek en mathematica eenerzijds en tusschen muzikalen en mathematischen aanleg anderzijds een zeer nauw verband bestaat. Daar dit probleem mij in verband met mijn muziekpsychologische studiën interesseert, heb ik besloten deze veronderstelde correlatie nader te onderzoeken. Ik wend mij derhalve tot U met het vriendelijk verzoek, dit formulier nauwkeurig te willen invullen en mij terug te zenden. Zoo U in twijfel is, of het door U gegeven antwoord op de gestelde vraag van toepassing is, dan verzoek ik U, er een vraagteeken achter te zetten. — Mochten de resultaten dezer enquête gepubliceerd worden, dan geschiedt dit natuurlijk zonder vermelding van de namen der betrokken personen. Wel zal ik trachten, hen van het feit der publicatie in kennis te stellen.

Voor Uw medewerking, die ik zeer op prijs stel, betuig ik U bij voorbaat mijn hartelijken dank!

Prof. Dr. G. RÉVÉSZ.

Naam v. d. invuller(ster) .... Adres: ....
....

(In blokletters)

Rekent U zich tot de zuivere mathematici, tot de mathematisch natuurkundigen of tot de experimenteel natuurkundigen? (Doorstrepen, wat niet past).

---

[1]) Bij onze enquête hebben wij ons tot Nederland moeten beperken, daar het bij den tegenwoordigen toestand niet mogelijk was met buitenlandsche mathematici in contact te komen. Men mag echter aannemen, dat een onderzoek inzake de mathematici van andere landen, ook wanneer die landen op een gemiddeld hooger of lager muzikaal niveau dan Nederland zouden staan, geen ander beeld van de verdeeling der mathematici met betrekking tot hun muzikalen aanleg zou opleveren. De dispositioneele verhoudingen in Nederland kunnen in wezen niet verschillen van die in andere beschaafde landen, aangezien de algemeene muzikale cultuur en de ontwikkelingsmogelijkheden in Nederland zeker niet ongunstig bij die in de meeste andere landen afsteken.

Algemeene vragen	Antwoord	Deze kolom vrij laten!
A. Heeft U belangstelling voor muziek?	ja — neen [1])	
B. Beschouwt U zich als muzikaal?	zeer muzikaal - muzikaal - matig muzikaal - onmuzikaal	
C. Zoo ja, waarin manifesteert zich dan Uw muzikaliteit?		
Speciale vragen		
Groep I. 1. Bespeelt of bespeelde U een instrument? (Piano, strijkinstrument, blaasinstrument etc.).		
2. Zingt of zong U? (Solo of in een koor).		
3. Werkt of werkte U mee in een orkest of ander muziekgezelschap?		
4. Fantaseert of fantaseerde U op de piano of op een ander instrument?		
5. Componeert of componeerde U?	ja — neen	
6. Heeft U regelmatig muziekonderricht genoten?	ja — neen	
Speciale vragen		
Groep II. 7. Bezoekt U vaak concerten?	ja — neen	
8. Waarvoor heeft U hierbij voorkeur? (Solisten, kamermuziek, orkestmuziek, oratoria etc.).		
9. Welke componisten hebben Uw bijzondere belangstelling, of tot wie van hen voelt U zich bijzonder aangetrokken?		
Groep III. 10. Herkent U gemakkelijk muziekstukken?	ja — neen	

[1]) Doorstrepen wat niet past.

Algemeene vragen	Antwoord	Deze kolom vrij laten!
11. Is U in staat enkele malen gehoorde (of voor dit doel herhaalde) melodieën of motieven juist na te zingen?	ja — neen	
12. Kunt U de hoofdintervallen (octaaf, quint, quart, kleine en groote terts) *herkennen* en *benoemen*?	ja — neen	
13. Kunt U een gehoord interval zingend *transponeeren*? (Bijv. U hoort de quint c—g en moet dan ditzelfde interval met een gegeven es als grondtoon zingen, dus es—bes.)[2]		
14. Heeft U een *absoluut* gehoor?		
15. Zoo ja, voor het geheele toongebied, of alleen voor het midden, of uitsluitend voor de kamertoon a^1?		
Groep IV[3]		
16. Is het U bekend, dat er in Uw familie, van vaders- of van moederszijde, *muzikale aanleg* in productieve of reproductieven zin voorgekomen is? Waarin is die tot uiting gekomen? Antwoord:		
17. Is het U bekend, dat er in Uw familie, van vaders- of van moederszijde, aanleg in *mathematische* of *natuurwetenschappelijke* richting voorgekomen is? Waarin is die tot uiting gekomen? Antwoord:		
18. Huldigt U de opvatting, dat er tusschen mathematiek en muziek een opvallende samenhang bestaat? Antwoord:		
19. Huldigt U de opvatting, dat mathematische aanleg met aanleg voor muziek gepaard gaat? Antwoord:		
20. Heeft U belangstelling voor den mathematischen grondslag der muziek? Antwoord:		

[2]) Open laten, indien U dit niet voor U zelf kunt controleeren.
[3]) Indien de vragen van groep IV U aanleiding geven tot uitvoeriger beantwoording, gelieve U dit op een afzonderlijk vel te doen!

Van een methodologisch standpunt uit beschouwd zou het natuurlijk juister geweest zijn alle in Nederland levende mathematici en physici bij deze enquête te betrekken. Wat de mathematici betreft hebben wij er echter de voorkeur aan gegeven, ons slechts tot diegenen te wenden, van wie verondersteld mag worden, dat zij voor de wiskunde als wetenschap een warme belangstelling koesteren. Daarbij scheen het ons het meest doelmatig de medewerking der leden van het „Wiskundig Genootschap" in te roepen, waarbij wij ons baseerden op de ledenlijst van het jaar 1941, aangevuld met de namen van de leden, die sindsdien toetraden. Ik geef toe, dat de beperking tot de leden dezer vereeniging niet geheel van willekeur vrij te pleiten is, maar aan den anderen kant is het zeker, dat het meerendeel der mathematisch geïnteresseerden en op het gebied der wiskunde creatief werkzame personen via de ledenlijst der genoemde vereeniging te bereiken is.

Waar een scheiding tusschen mathematische en experimenteele physici niet steeds mogelijk is en ook de experimenteele physica een uitgebreide mathematische kennis veronderstelt, hebben wij naast de mathematische physici een evenredig aantal experimenteele physici en ingenieurs verzocht aan onze enquête deel te nemen. De namen van deze personen ontleenden wij aan de ledenijst der „Natuurkundige Vereeniging". Bij de selectie kwamen de gepromoveerden weliswaar in eerste instantie, doch geenszins uitsluitend in in aanmerking [1]). Zoo werden er drie groepen van mathematisch aangelegde personen op hun muzikaliteit onderzocht, namelijk zuivere mathematici, mathematische physici en experimenteele physici. De indeeling in deze 3 groepen geschiedde op grond van de eigen opgaven der medewerkenden.

Met het opstellen der lijsten was het voorbereidende werk niet afgeloopen; er moest nog een tweetal groepen van niet-mathematici als *contrôle-groepen* uitgezocht worden. Dat het betreffende vraagstuk niet op te lossen is zonder gebruik te maken van contrôle-groepen, spreekt vanzelf. Of de graad van correlatie tusschen mathematische en muzikale begaafdheid bij mathematici hoog of laag is,

---

[1]) Wij waren wel gedwongen tot een selectie over te gaan en deze was nog het minst willekeurig, wanneer wij ons aan de ledenlijsten der grootste mathematische en natuurkundige vereenigingen hielden. Dit is de reden, waarom een aantal mathematici en physici van beteekenis van ons geen formulier ontving.

kan immers slechts vastgesteld worden door een vergelijking met personen, die, wat hun opleiding en sociaal milieu betreft, met de mathematici overeenkomen. Voor het contrôle-onderzoek komen die groepen in aanmerking, waarvan niet aangenomen kan worden, dat zij, hoewel in gemiddeld geestelijk niveau met de mathematici overeenstemmend, in bijzondere mate muzikaal aangelegd zijn. Na zorgvuldig overleg viel mijn keuze op *medici* en *literatoren*. Bij de medici heb ik, voor zoover mogelijk, hetzelfde selectieprincipe als bij de physici toegepast, bij de literatoren gaf de bekendheid den doorslag.

De formulieren werden aan 193 zuivere mathematici, aan 202 mathematische en experimenteele physici, aan 226 medici en aan 228 literatoren gezonden, dus aan 849 personen van beiderlei kunne. Van hen hebben 582, d.w.z. 68,6 %, geantwoord, een veel hooger percentage dan bij vroegere enquêtes [1]). Bewijzen voor de belangstelling, welke bij de medewerkenden voor het geprojecteerde onderzoek bestond, leverden de talrijke brieven, waarin zij verdere bijzonderheden mededeelden, uitvoerige commentaren op hun antwoorden gaven, soms ook onze bedoelingen en methode op meer of minder vriendelijke wijze becritiseerden. Voor den tijd en de moeite, die onze correspondenten zich voor ons getroost hebben, betuig ik hun hierbij mijn dank en ik hoop, dat zij na de lezing van dit verslag de overtuiging zullen krijgen, niet doelloos aan onze enquête te hebben medegewerkt [2]).

A. *Methodiek.*

Wanneer wij de frequentie van den muzikalen zin onder de mathematici, resp. physici, willen vaststellen, dan is het noodzakelijk om door een betrouwbare methode de muzikale van de onmuzikale personen te scheiden. Deze scheiding kan men op drieërlei wijze bewerkstelligen.

Ten eerste kan men uitgaan van de *eigen beoordeeling* der medewerkenden (vraag B) en de personen, die zich zelfs als onmuzikaal

---

[1]) Bij de erfelijkheidsenquête van Heymans en Wiersma werd slechts 13,3 % der uitgezonden vragenlijsten door de ontvangers teruggezonden.

[2]) Bij de opstelling en de bewerking van het statistische materiaal hebben in de eerste plaats H. H. de Jager, math. cand. en verder Gravendaal hun bereidwillige medewerking verleend.

beoordeelden, zonder verdere contrôle als zoodanig beschouwen en tegenover de anderen stellen. Dat een op eigen beoordeeling gebaseerde classificatie vanwege haar subjectiviteit en tengevolge van de verscheidenheid der daarbij toegepaste maatstaven wetenschappelijk niet verantwoord is, behoeft geen betoog. Het zal vaak voorkomen, dat muzikaal zwak aangelegde personen hun capaciteiten overschatten en zich tot de muzikalen rekenen; daartegenover zullen er anderen zijn, die, hun prestaties onderschattend, zich zonder reden als onmuzikaal aanduiden. Verdere moeilijkheden ontstaan daardoor, dat het muzikaal zijn door de medewerkenden op verschillende manieren geïnterpreteerd wordt, vooral waar wij met opzet van een definitie der muzikaliteit afzagen[1]). Ondanks de moeilijkheden, die zich bij de eigen beoordeeling over 't algemeen zeker in ons geval voordoen, daar immers de rangschikking in de beide grondklassen zonder willekeur niet mogelijk is, moet men toch aan het eigen oordeel van de medewerkenden een zekere symptomatische waarde toekennen. Het is nl. niet aan te nemen, dat personen met een warme belangstelling en een goed begrip voor muziek zich als onmuzikaal kenschetsen en dat zij, die zich ten opzichte van de muziek koel en onverschillig, of zelfs afwijzend gedragen, vóór muzikaal willen doorgaan. Welke symptomatische waarde men aan de eigen beoordeeling mag toekennen, met andere woorden, hoe groot de kans is, dat iemand zich van de sterkte van zijn muzikalen aanleg een met de objectieve criteria overeenstemmende voorstelling vormt, kan men beoordeelen, wanneer men de correlatie tusschen de eigen beoordeeling en onze beoordeeling bepaalt. Een dergelijke vergelijking — wij komen nog uitvoeriger daarop terug — is voor de mate van betrouwbaarheid van de eigen beoordeeling gunstig uitgevallen.

De tweede methode om de muzikalen van de onmuzikalen te onderscheiden willen wij die der *minimum-eischen* noemen. Volgens deze methode rekenen wij die personen tot de juist nog muzikalen, die minstens een zeker aantal vragen positief kunnen beantwoorden. Dit procédé veronderstelt een selectie van vragen, waaraan wij met

---

[1]) Naar mijn overtuiging leidt bij een schriftelijke enquête een definitie gemakkelijker tot misverstanden dan wanneer men de personen in kwestie de volle vrijheid laat. Dat het begrip muzikaliteit in hoofdzaak op dezelfde manier geïntrepreteerd werd, volgt uit de correlatie, die tusschen de resultaten der subjectieve en objectieve beoordeelingen bestaat. Men zie de volgende uiteenzettingen.

betrekking tot de muzikale dispositie een bepaalde beteekenis wenschen toe te kennen. Ook het vastleggen van minimum-eischen is niet geheel van een zekere willekeur vrij te pleiten, daar men de eischen òf betrekkelijk hoog òf betrekkelijk laag kan stellen. Dit sluit echter niet uit, dat men de onderste grens der muzikaliteit toch op een tamelijk aanvaardbare wijze kan bepalen. Het zal bijv. geen tegenspraak uitlokken, wanneer men iemand niet meer tot de muzikale menschen rekent, die geen van de vragen of slechts de eerste algemeene vraag (A) positief beantwoorden kan.

De methode der minimum-eischen kan men cum grano salis ook bij de selectie der andere extreme groep, die der zeer muzikalen, toepassen. Als zeer muzikaal kunnen in dit geval die personen beschouwd worden, die tenminste de vragen 10—13 en één van de beide vragen 4 en 5 in absoluut positieven zin beantwoorden.

Ook al zijn tegen de toepassing der methode van de minimum-eischen bij de selectie van de muzikalen en onmuzikalen geen principieele bezwaren in te brengen, zij heeft toch het bezwaar, dat zij ons niet over den *graad der muzikaliteit* kan oriënteeren. Om dit bezwaar te ondervangen en over een betrouwbaar gedifferentieerd-diagnostisch procédé te kunnen beschikken, hebben wij aan een derde methode, de methode der *algemeene symptomen* de voorkeur gegeven. Ten opzichte van de eerste methode biedt deze het voordeel, dat zij een groot aantal van zulke vragen omvat, die slechts op grond van *objectieve* gegevens te beantwoorden zijn. Dit feit geeft ons het recht, dit procédé als de *objectieve* methode tegenover de *subjectieve* methode der eigen beoordeeling te stellen. Het gaat hier niet om een subjectieve waardeering, maar om ervaringen, die een ieder eenigermate muzikaal mensch met een tamelijke nauwkeurigheid in staat is te beoordeelen. Deze methode is daarom boven de tweede te verkiezen, daar zij ten eerste op een veel omvangrijker ervaringsmateriaal gebaseerd is en ten tweede ons de mogelijkheid verschaft, de medewerkers volgens den graad hunner muzikaliteit in bijzondere groepen in te deelen. Het *aantal* der positief beantwoorde vragen, dus het *bestaan* der door de positieve prestaties aangegeven functies eenerzijds en de *hoogte hunner ontwikkeling* anderzijds zullen de maatstaf vormen voor den graad der muzikale dispositie.

Deze *methode der algemeene symptomen* kan men op tweeërlei wijze toepassen. Ten eerste kunnen wij aan alle positieve antwoorden, die op de vraaggroepen I, II en III inclusief op de vraag A —

maar met uitzondering van de vragen 6, 8, 9, 14 en 15[1]) betrekking hebben — gelijke waarde toekennen, d.w.z. alle positieve antwoorden met 1 waardeeren. Den hoogsten graad van muzikaliteit zal men dus aan die personen toekennen, die het maximale aantal vragen (11) positief beantwoorden. Deze eenheidsmethode zal op menig gebied verantwoord zijn, vooral daar, waar de gestelde vragen, opgaven of prestaties ongeveer gelijke symptomatische waarde bezitten, of wanneer bijzondere omstandigheden het opstellen van een speciaal waardeeringsschema ondoelmatig of overbodig maken. Bovendien is men in de testpsychologie bij de quantitatieve waardeering van prestaties van het gebruik eener methode, waarbij de rangorde der belangrijkheid in cijfers tot uitdrukking kwam, teruggekomen. Dit heeft een goede reden: deze cijfers waren voor het meerendeel niet empirisch verkregen, maar op grond van bepaalde overwegingen of vermoedens ingevoerd en lieten derhalve de willekeur vrij spel. Uiteraard zal men in de practijk terecht sommige eigenschappen en vermogens hooger waardeeren dan andere, maar waarom men de eene met 3 punten, de andere met 2 punten zou waardeeren, kan men slechts zelden overtuigend fundeeren.

---

[1]) De vragen over het absolute gehoor (14 en 15) hebben wij bij de bepaling der muzikaliteit niet in aanmerking genomen, daar het nog niet uitgemaakt is, of deze soort van muzikaal gehoor tot de essentieele kenmerken der muzikaliteit behoort. Het feit, dat eminente muzikale begaafdheid vaak voorkomt zonder aangeboren absoluut gehoor, wijst er in elk geval op, dat deze capaciteit niet tot de constitutieve kenmerken eener hoog ontwikkelde muzikaliteit gerekend mag worden. Wel is juist bij dit onderzoek gebleken, dat het absolute gehoor *als symptoom* eener hoog ontwikkelde muzikaliteit de aandacht verdient, aangezien het in verreweg de meeste gevallen met een hoogen graad van muzikaliteit gepaard gaat. Zijn symptomatische beteekenis komt vooral in de tegeninstantie tot uitdrukking. Van onze medewerkers bezaten er een twintigtal een absoluut gehoor en van hen behoorden er 17 (85 %) tot de zeer muzikalen, de overigen 3 tot de uitgesproken muzikalen. Bovendien hebben 15 personen verklaard, dat zij een geheugen voor den normaaltoon, dus ook een soort van absoluut gehoor, bezitten. Van hen behoorden er 6 tot de hoogste groep, 9 tot de middengroep. De enquête wijst niet uit, of een absoluut gehoor nu en dan bij totaal onmuzikale personen kan voorkomen. Om dat te kunnen vaststellen zou men een groot aantal onmuzikale personen experimenteel moeten onderzoeken. Het feit echter, dat wij in de groote groep der middelmatig muzikalen slechts enkele personen met een absoluut gehoor gevonden hebben, maakt het uiterst onwaarschijnlijk, dat het absolute gehoor bij onmuzikale personen zou voorkomen.

Bij ons onderzoek is een dergelijke eenheidsschaal evenwel niet verantwoord. De symptomatische beteekenis der eigenschappen en capaciteiten, waarop de afzonderlijke hier in aanmerking komende prestaties gebaseerd zijn, is zoo verschillend, dat de daarop betrekking hebbende positieve antwoorden niet als gelijkwaardig beschouwd mogen worden. Dit feit rechtvaardigt de toepassing der methode van de ongelijke waardeering der positieve antwoorden, die daarin bestaat, dat men de afzonderlijke vragen volgens hun symptomatische waarde van elkaar onderscheidt en aan de positieve antwoorden dienovereenkomstig verschillende waardeeringscijfers toekent.

Ontegenzeggelijk is deze zoo goed als elke andere waardeering op een subjectieve beoordeeling gebaseerd; toch is zij niet zoo willekeurig als het op het eerste gezicht wel schijnt. Ik heb de vragen in quaestie aan een aantal goede musici en muziekpaedagogen voorgelegd met het verzoek hen volgens hun muzikale beteekenis te beoordeelen en in cijfers te waardeeren. Het bleek toen, dat hun opvattingen in wezen goed met elkaar en met de onze overeenstemden.

De waardeeringsmethode geschiedt met behulp van punten en wel van 1—6 (premiesysteem). De som van alle punten representeert het totale, het eindcijfer van één persoon. Dit eindcijfer beslist eenerzijds over de indeeling der afzonderlijke personen in de beide hoofdgroepen, anderzijds geeft het een bruikbare maatstaf voor de verschillen in den graad der muzikaliteit.

De positieve antwoorden werden volgens het volgende schema gewaardeerd.

Vraag	A	wordt	gewaardeerd met	1	punt.
„	1	„	„	1	„
„	2	„	„	2	„
„	3	„	„	3	„
„	4	„	„	3	„
„	5	„	„	5	„
„	10	„	„	2	„
„	11	„	„	3	„
„	12	„	„	3	„
„	13	„	„	3	„

Bij de waardeering der antwoorden moesten wij rekening houden

met de bij elkaar behoorende en elkaar aanvullende vragen. De antwoorden op de vragen 2 en 3 konden samen niet meer dan 3 punten, 4 en 5 niet meer dan 6, en 12 en 13 niet meer dan 5 punten opbrengen. Het maximale aantal punten kon derhalve 22 niet te boven gaan.

Op grond van een analyse der verdeelingscurve zijn wij bij het in aanmerking nemen van de correctheid der positief beantwoorde vragen tot een indeeling in groepen van telkens 3 eenheden gekomen. Als absoluut onmuzikaal beschouwen wij personen, die ten hoogste één punt behaalden; tot de niet-muzikalen rekenen wij hen, die een eindcijfer behaalden tot en met 4. Deze beide groepen vormen te zamen de eerste klasse, namelijk *die der onmuzikalen*. De tweede klasse omvat de *matig muzikalen* (eindcijfers 5—10) waarbij 5—7 punten de laagste trap — die der eenigszins muzikalen — 8—10 punten de hoogste trap — die der tamelijk muzikalen — representeeren. De derde klasse, die der *muzikalen*, wordt gevormd door hen, die de eindcijfers 11—16 behaalden, waarbij 11—13 wijzen op een middelmatige, 14—16 op een uitgesproken muzikaliteit. Ten slotte hebben wij de klasse der *zeer muzikalen* (17—22 punten), waarbij wij ook twee groepen onderscheiden, nl. die der bijzonder muzikalen (17—19 punten) en die der buitengewoon muzikalen (20—22 punten).

Wij krijgen dus het volgende schema:

	Groepen:		Klasse:
0—1	a.	absoluut onmuzikaal	onmuzikaal
2—4	b.	niet muzikaal	
5—7	a.	eenigszins muzikaal	matig muzikaal
8—10	b.	tamelijk muzikaal	
11—13	a.	middelmatig muzikaal	muzikaal
14—16	b.	uitgesproken muzikaal	
17—19	a.	bijzonder muzikaal	zeer muzikaal.
20—22	b.	buitengewoon muzikaal	

B. *Algemeene resultaten.*

De resultaten, die wij op grond van de methode der ongelijke waardeering van de positieve antwoorden verkregen, zijn in de nevensgaande tabellen 1a en 1b verwerkt. Tabel 1a beperkt zich

tot het aangeven van de procentueele verdeeling der beide hoofdgroepen, namelijk der muzikalen en der onmuzikalen. Tot de klasse der onmuzikalen behooren de personen, die een eindcijfer hebben tot en met 4, alle overigen, dus met een eindcijfer van 5 tot 22 punten, tot de muzikalen.

Tabel 1b scheidt de *absoluut* onmuzikalen eenerzijds van de ook tot de onmuzikalen behoorende niet-muzikalen, anderzijds van de muzikalen. Als absoluut onmuzikaal beschouwen wij de personen met een eindcijfer van 0 of 1.

Tabel 1a.

Verdeeling der muzikalen en onmuzikalen over de vier beroepsgroepen.

	Muzikaal		Onmuzikaal		Totaal
	5—22	%	0—4	%	
Mathematici	76	56	59	44	135
Physici	116	67	56	33	172
Medici	97	59	68	41	165
Literatoren	78	71	32	29	110
Totaal	367	63	215	37	582

Tabel 1b.

Verdeeling der muzikalen en der absoluut onmuzikalen over de vier beroepsgroepen.

	Muzikaal		Abs. onmuzikaal		Totaal
	2—22	%	0—1	%	
Mathematici.	102	76	33	24	135
Physici	145	84	27	16	172
Medici.	134	81	31	19	165
Literatoren	96	87	14	13	110
Totaal	477	82	105	18	582

De beide tabellen geven in de eerste plaats een betrouwbaar beeld over het voorkomen van den muzikalen aanleg bij een aantal hoogere beroepen. Het bleek, dat bij de door ons onderzochte beroepsgroepen gemiddeld 18 % absoluut onmuzikalen en ongeveer evenveel, nl. 19 % niet-muzikalen te vinden zijn. Wil men de beide groepen der onmuzikalen tot één klasse samenvoegen, dan komen wij tot het resultaat, dat 37 %, d.w.z. ca. 1/3 deel der tot deze beroepscategoriën behoorende menschen practisch onmuzikaal zijn.

Verder geven de in de beide tabellen verwerkte percentages een voorstelling van de onderlinge verhouding der 4 beroepsgroepen met betrekking tot hun muzikaliteit. Tevens geven zij een ondubbelzinnig antwoord op de oorspronkelijk door ons gestelde vraag inzake de zgn. hooge frequentie der muzikaliteit bij de mathematici. De verhouding tusschen de muzikalen en onmuzikalen is bij de 4 groepen verschillend. Het meest interessant — en wat ook mijn vermoeden volledig bevestigt — is, *dat de mathematici wat hun muzikaliteit betreft ten opzichte van de andere groepen geenszins een bevoorrechte plaats innemen.* Veeleer kan men het tegenovergestelde beweren, want wij vonden onder de overige drie groepen procentueel meer muzikaal aangelegde personen dan onder de mathematici. Wat de frequentie der muzikaliteit betreft komen de literatoren met 87 % op de eerste plaats of indien men ook de niet-muzikalen aftrekt, met 71 %. De tweede plaats bezetten de physici met 84 resp. 67 %, de derde de medici met 82 resp. 59 % en als laatsten komen de mathematici met 76 resp. 56 %[1]. Uit de graphische voorstelling A blijkt zeer duidelijk, dat onder de mathematici het grootst aantal onmuzikalen te vinden is.

De in doorsnee geringere muzikaliteit der mathematici kan ook nog op andere wijze bevestigd worden. Wanneer men namelijk voor elk der 4 groepen het gemiddeld cijfer, hetzij met behulp van de methode der ongelijke waardeering, hetzij volgens de eenheidsmethode (aantal der positief beantwoorde vragen) berekent, komt ook een achterblijven der mathematici bij de andere groepen te voorschijn.

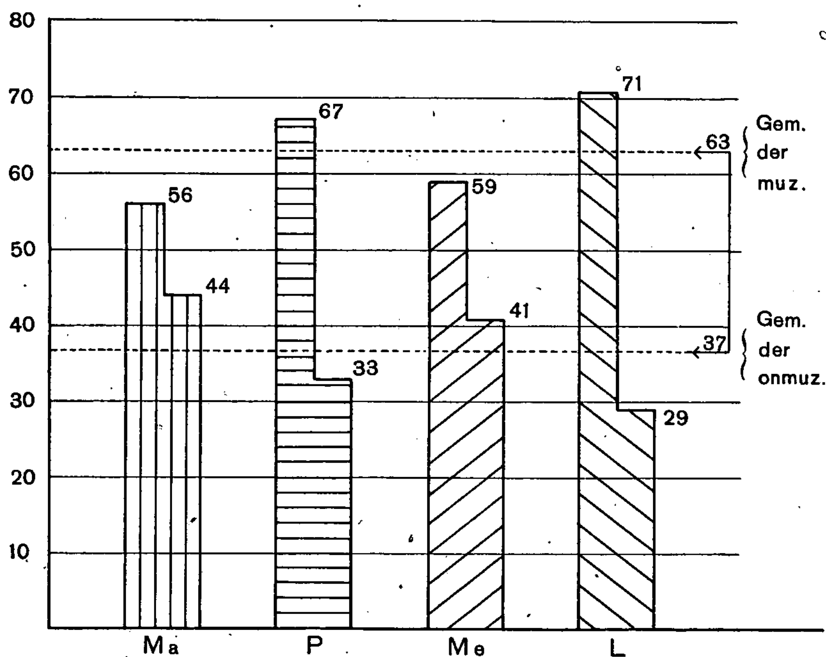
---

[1]) Ook dan, wanneer men de theoretische physici tot de mathematici rekent, verandert de rangorde niet. De muzikale mathematici paraisseeren in dit geval met 77 resp. 61 %, de muzikale experimenteele physici daarentegen met 85 resp. 66 %.

Verdeeling der muzikalen en onmuzikalen in % voor 4 groepen.

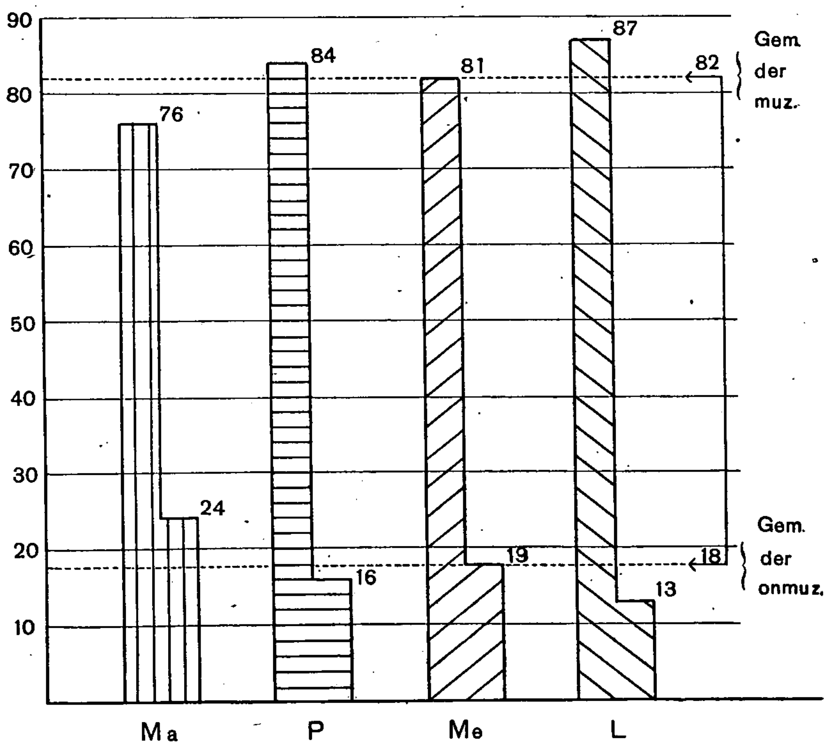
Grafische voorstelling A[1].

Muzikaal en onmuzikaal (tabel 1a).



Grafische voorstelling A[2].

Muzikaal en absoluut onmuzikaal (tabel 1b).



Ma = Mathematici P = Physici Me = Medici L = Literatoren

	Gemiddelden	
	Methode der ongelijke waardeering der positieve antwoorden	Eenheidsmethode
Mathematici	7.16	4.40
Physici	8.75	5.11
Medici	7.26	4.41
Literatoren . . .	9.58	5.16

Tabel 2 geeft het percentage der in qualiteitsklassen ingedeelde personen. De qualiteitsklassen dragen de cijfers 6 tot en met 0, waarbij het cijfer 6 de buitengewoon en bijzonder muzikalen (17—22), 5 de uitgesproken muzikalen (14—16 punten, 4 de middelmatig muzikalen (11—13 punten), 3 de tamelijk muzikalen (8—10 punten) en 2 de eenigszins muzikalen (5—7 punten) representeeren, terwijl de niet muzikalen (2—4) door het cijfer 1, de absoluut onmuzikalen door 0 gekenmerkt worden.

Tabel 2.

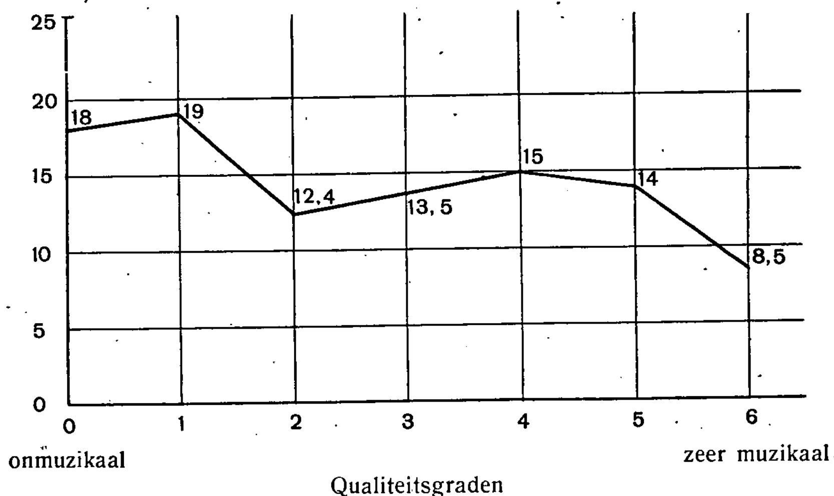
De graad der muzikaliteit volgens de methode der ongelijke waardeering der positieve antwoorden.

	Absoluut onmuzik. 0		Niet-muzikaal 1		Eenigszins muzikaal 2		Tamelijk muzikaal 3		Middelm. muzikaal 4		Uitgespr. muzikaal 5		Zeer muzikaal 6		Totaal
	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	
Mathematici . .	33	24	26	19	12	9	16	12	16	12	20	15	12	9	135
Physici	27	16	29	17	19	11	22	13	31	18	28	16	16	9	172
Medici	31	19	37	22	26	16	21	13	21	13	19	11	10	6	165
Literatoren . .	14	13	18	16	15	14	20	18	18	16	13	12	12	11	110
Totaal	105	18	110	19	72	12	79	14	86	15	80	14	50	8	582

De graphische voorstelling B geeft een duidelijk beeld van de verdeeling der onderzochte personen — dus nu onafhankelijk van de groep, waaronder zij ressorteeren — wat den graad hunner muzikaliteit betreft.

Grafische voorstelling B.

Verdeeling van den ontwikkelingsgraad der muzikaliteit in %
bij 582 personen (alle 4 groepen).



Men ziet, dat de procentueele verdeeling van 5 tot 2, dus van de uitgesproken muzikalen tot de eenigszins muzikalen, tamelijk constant is. Een sprong ontstaat bij de onmuzikalen (cijfers 1 en 0). Deze plotselinge verandering wijst erop, dat wij de scheidingslijn tusschen muzikalen en onmuzikalen op de juiste plaats (bij het puntenaantal 2) getrokken hebben.

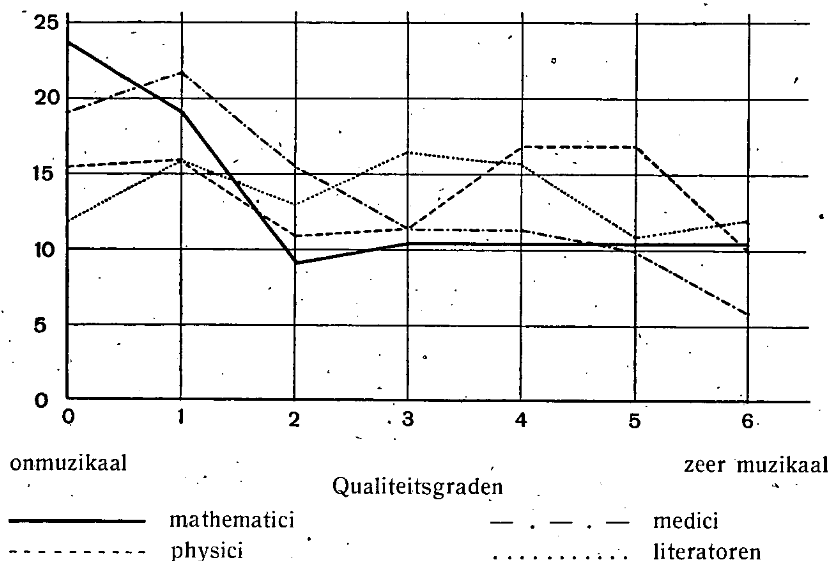
Wat de 4 beroepsgroepen betreft, zoo blijkt uit tabel 2, dat zij, met betrekking tot hun verdeeling over de verschillende qualiteitsklassen, sterk van elkaar afwijken. De grootste afwijking treedt bij de absoluut onmuzikalen aan den dag, nl. een van 11 %, de geringste bij de zeer muzikalen, nl. een van 3 %. In de gemiddelde zône blijft de variatiebreedte tamelijk constant, zij bedraagt daar ca. 5—7 %.

Zeer aanschouwelijk treden de afwijkingen tusschen de beroepsgroepen in de grafische voorstelling C aan den dag.

Onder de zeer muzikalen bezetten de literatoren de eerste plaats met 11 %, daarop volgen de physici en de mathematici met 9 % en ten slotte de medici met 6 %. Dezelfde volgorde vonden wij ook bij de zeer muzikalen, met dat verschil, dat de literatoren hier hun eerste plaats aan de physici moesten afstaan. De rangorde der onmuzikalen is een tamelijk getrouw spiegelbeeld van de buiten-

Grafische voorstelling C.

Verdeeling van den ontwikkelingsgraad der muzikaliteit voor de 4 groepen in %.



gewoon muzikalen. Het relatief kleinste aantal van onmuzikalen (cijfer 0—1) vinden wij bij de literatoren (29 %), onder wie wij immers ook het relatief grootste aantal van zeer muzikale personen aantroffen; daarna komen de physici met 33 %, de medici met 41 % en ten slotte de mathematici met 43 %. Dat bij de literatoren het aantal onmuzikalen relatief het kleinst is, kan men verklaren uit het feit, dat de muziek zelfs op de niet-muzikaal aangelegde literatoren vanwege haar maat en rythme, verder vanwege het verband, dat er tusschen muziek en tekst bestaat, een sterken invloed kan uitoefenen. Als een gevolg van de gevoelseffecten der muziek en haar relatie tot de dichtkunst zullen onmuzikale literatoren ten opzichte van de muziek van een andere verhouding blijk geven dan de overige groepen.

Tot een in wezen zelfde resultaat komt men, wanneer men de antwoorden op de manier van de eenheidsmethode in cijfers uitdrukt, dus alle vragen als gelijkwaardig beschouwt en aan alle positieve antwoorden, onafhankelijk van hun symptomatische waarde, gelijkelijk het cijfer 1 toekent. Dit was niet anders te verwachten, want men kon wel van te voren aannemen, dat menschen met een

groote muzikale begaafdheid meer positieve antwoorden zouden geven dan zij, die minder of in het geheel niet, muzikaal begaafd zijn. Het meer en minder komt bij beide berekeningswijzen duidelijk te voorschijn.

De volgende tabellen 3a en 3b correspondeeren met de tabellen 1a en 1b.

Tabel 3a.

Verdeeling der muzikalen en onmuzikalen over de vier beroepsgroepen. (Eenheidsmethode).

	Muzikaal		Onmuzikaal		Totaal
	4—11	%	0—3	%	
Mathematici	77	57	58	43	135
Physici	113	66	59	34	172
Medici	98	59	67	41	165
Literatoren	78	71	32	29	110
Totaal	366	63	216	37	582

Tabel 3b.

Verdeeling der muzikalen en de *absoluut* onmuzikalen over de 4 beroepsgroepen. (volgens de Eenheidsmethode).

	Muzikaal		Abs. onmuzikaal		Totaal
	2—11	%	0—1	%	
Mathematici	102	76	33	24	135
Physici	145	84	27	16	172
Medici	135	82	30	18	165
Literatoren	96	87	14	13	110
Totaal	478	82	104	18	582

Vergelijkt men de resultaten van beide berekeningswijzen, dan blijkt een buitengewone overeenstemming. Dat was ook niet anders te verwachten. Immers, kan iemand ten hoogste één vraag positief beantwoorden, zooals dat bij de absoluut onmuzikalen het geval is, dan zal die vraag er een zijn van de soort, die met 1 gewaardeerd

wordt. Dit is de reden, waarom men bij de absoluut onmuzikalen bij beide berekeningswijzen bijna hetzelfde aantal gevallen krijgt.

Op de *methode der minimum-eischen* willen wij niet uitvoerig ingaan; wij willen slechts haar bruikbaarheid demonstreeren. Deze blijkt daaruit, dat haar resultaten met die van de op alle vragen toegepaste methode der algemeene symptomen goed overeenstemmen. Volgens deze methode staan op de laagste trap van muzikaliteit die personen, die buiten de algemeene vraag A (belangstelling voor muziek) tenminste één der speciale vragen positief kunnen beantwoorden. Allen, die niet eens aan deze minimum-eisch kunnen voldoen, worden zonder meer tot onmuzikalen gerekend. Wanneer wij de op deze wijze ontstane verdeeling der muzikalen en onmuzikalen met de methode der naar belangrijkheid gewaardeerde antwoorden vergelijken, dan treedt een zeer groote overeenstemming aan den dag, zooals overigens te verwachten was, daar deze methode gebaseerd is op bepaalde overwegingen, die uit het geheel der gestelde vragen volgen.

Tabel 4.

Aantal der onmuzikalen, bepaald door de methode der minimum-eischen en door een vergelijking op grond van de methode der algemeene symptomen.

	Methode der minimum eischen			Methode der ongelijke waardeering der positieve antwoorden Tot. der abs. onmuzikalen
	Geen der vragen positief beantwoord	Slechts vraag A positief, de overige negatief	Totaal der absoluut onmuzikalen	
Mathematici . . .	26	4	30	33
Physici	18	1	19	27
Medici	21	5	26	30
Literatoren	7	6	13	19
Totaal	72	16	88	109

De methode der minimum-eischen heeft een groote practische waarde; zij is nl. in staat in uiterst korten tijd en met absolute zekerheid vast te stellen of iemand tot de muzikalen of tot de absoluut

onmuzikalen behoort. Het is reeds voldoende, dat iemand van zich zelf zegt, dat hij voor de muziek geen belangstelling heeft (vraag A) om hem met absolute zekerheid tot onmuzikaal te verklaren [1]). Wij zijn bij ons onderzoek geen enkel geval tegengekomen, waarin een persoon bij negatieve beantwoording der vraag A meer dan 3 punten behaalde, d.w.z. net boven de laagste grens der muzikaliteit uitkwam. Van de 582 personen hebben er in totaal 92 hun gebrek aan muzikale belangstelling bekend en van hen hebben er 88 (96 %) in het geheel geen of ten hoogste één vraag en de andere 4% niet meer dan 3 vragen in positieven zin beantwoord. Dientengevolge behoorden alle 92 in de klasse der onmuzikalen. Deze snelle en betrouwbare diagnose hebben wij aan ons statistisch onderzoek te danken.

Deze constateeringen veroorloven het opstellen van den volgenden methodischen regel: *toont iemand voor de muziek geen belangstelling, dan is dat voldoende om hem als onmuzikaal te beschouwen* [2]).

De methode der minimum-eischen kan men, zooals reeds vermeld, ook bij het determineeren der zeer muzikalen toepassen. Het is nl. gebleken, dat personen, die de vragen 4 en 5 (fantaseeren en componeeren) beide positief beantwoorden, tot de hoogste groep der muzikale menschen behooren. Onder de 26 fantaseerenden en componeerende personen was er slechts één, die muzikaal niet meer dan middelmatig begaafd was. Een tweede geval was twijfelachtig en kan dus beter buiten beschouwing blijven.

Tenslotte willen wij de resultaten van de *methode der eigen beoordeeling* bespreken. Bij de algemeene vraag B werden onze medewerkers verzocht den graad hunner muzikaliteit aan te geven, waarbij vier categorieën te hunner beschikking stonden, nl. onmuzikaal, matig muzikaal, muzikaal en zeer muzikaal. Aangezien algemeen aangenomen wordt, dat een op eigen beoordeeling berustende classificatie wetenschappelijk niet geoorloofd is en bij een massa-onderzoek slechts onder het grootste voorbehoud toegepast mag

---

[1]) Dit is niet van toepassing op die personen, die uit neurotische oorzaken onmuzikaal schijnen zonder het werkelijk te zijn. Zie mijn „Inleiding tot de muziekpsychologie", Amsterdam, 1943.

[2]) Deze stelling laat zich niet omkeeren: onder de 104 *absoluut* onmuzikalen zijn er toch nog 17, die verklaarden belangstelling voor de muziek te hebben. Het is typeerend, dat de niet-muzikalen met het puntenaantal van 2—4 in ca. 90 % der gevallen de vraag A positief beantwoord hebben.

worden, interesseerde het ons, of dit — in het algemeen wel juiste — standpunt ook in ons geval geldt. Tot onze verrassing vonden wij, dat zoowel de rangschikking in de beide grondklassen als ook de verdere differentieering binnen de categorieën der muzikalen op grond van de eigen beoordeeling zeer wel mogelijk is en dat de resultaten met die der op objectieve feiten berustende methode van de ongelijke waardeering der positieve antwoorden op opvallende wijze overeenstemmen. Op grond van deze ervaring kunnen wij — althans op het gebied der muzikale begaafdheid — aan het eigen oordeel met betrekking tot de muzikaliteit een hooge symptomatische waarde toekennen. Dit resultaat behoorde de psychologie ertoe te brengen ook voor andere gebieden de bruikbaarheid der eigen beoordeeling door contrôleering met objectieve methoden te onderzoeken.

In de tabellen 5 en 6, die volgens hetzelfde schema als de tabellen 1a en 2 geconstrueerd werden, zijn de resultaten van onze enquête op grond van de methode der eigen beoordeeling aangegeven.

Tabel 5.

Verdeeling der muzikalen en absoluut onmuzikalen over de 4 beroepsgroepen volgens eigen beoordeeling.

	Muzikaal		Abs. onmuzikaal		Totaal
	2—22	%	0—1	%	
Mathematici	100	74	35	26	135
Physici	139	81	33	19	172
Medici	127	77	38	23	165
Literatoren	97	88	13	12	110
Totaal	463	80	119	20	582

Vergelijkt men de met behulp der beide methoden verkregen waardeeringen met elkaar, dan is de overeenstemming direct verbluffend. In het bijzonder geldt dat voor de percentages met betrekking tot de mathematici en de literatoren. Bij de mathematici vinden wij 76 % tegenover 74 %, bij de literatoren 87 % tegenover 88 %.

De in de gedifferentieerde tabel 6 aangegeven waarden correleeren weliswaar niet zoo precies met die van tabel 2 als het geval was tusschen de correspondeerende waardeeringen van tabel 3 en 5.

Tabel 6.

De graad der muzikaliteit volgens eigen beoordeeling.

	Absol. onmuz.		Niet-muz.		Eenigszins muz.		Tamelijk muz.		Middelmatig muz.		Uitgesproken muz.		Zeer muz.		?[1])	Totaal
	A	%	A	%	A	%	A	%	A	%	A	%	A	%	A	A
Mathematici . . .	35	26	2	1,5	45	33	4	3	37	27	2	1,5	8	6	2	135
Physici	33	19	2	1	63	37	6	3	58	34	1	1	6	3	3	172
Medici	38	23	2	1	67	41	1	1	51	31	1	1	5	3	0	165
Literatoren . . .	13	12	0	0	42	38	1	1	39	35	2	2	8	7	5	110
Totaal	119	20	6	1	217	37	12	2	185	32	6	1	27	5	10	582

[1]) Deze kolom betreft de aantallen van hen, die zich zelf in geen enkele der vier groepen konden plaatsen.

Dat kan men hoofdzakelijk daardoor verklaren, dat de onmuzikalen bij de eigen beoordeeling de neiging hebben hun capaciteiten te *overschatten,* terwijl de muzikaal begaafden hun prestaties *onderschatten.* Deze neigingen treden zeer duidelijk aan den dag, wanneer men de in de tabellen 2 en 6 aangegeven cijfers der onmuzikalen en uitgesproken muzikalen (5—6) tegenover elkaar stelt.

	Zeer muzikaal en uitgesproken. muzikaal	absoluut onmuzikaal en niet-muzikaal
Volgens de methode der ongelijke waardeering der positieve antwoorden	130	215
Volgens de methode der eigen beoordeeling	33	125

Ook wat de differentieering der qualiteitsgroepen betreft, komt een behoorlijke overeenstemming tusschen de resultaten der beide methoden te voorschijn (tabel 2 en 6), indien men althans de onderafdeelingen a en b telkens tot een hoofdgroep vereenigt.

De correlatie tusschen de eigen beoordeeling en de objectieve bepaling komt duidelijk in de correlatietabel 7 tot uitdrukking.

Correlatietabel 7.

Objectieve beoordeeling: Punten	Qualiteits-klasse	Subjectieve beoordeeling: 6	5	4	3	2	1	0	?	Totaal
20—22	6	8		3	1				1	13
17—19	6	12	3	19	1	2				37
14—16	5	5	1	61	1	11			1	80
11—13	4	1	1	49	3	29		2	1	86
8—10	3		1	32	3	33	2	5	3	79
5—7	2	1		10	2	53	1	2	3	72
2—4	1			9	1	74	2	23	1	110
0—1	0			2		15	1	87		105
		27	6	185	12	217	6	119	10	582

De overeenstemming tusschen de objectieve en de subjectieve methode wijst erop, dat men in staat is over zijn eigen prestaties een oordeel te leveren, dat op objectieve geldigheid aanspraak kan maken.

Tabel 8.

Vergelijking der verdeeling in muzikalen en absoluut onmuzikalen volgens de drie methoden.

	Muzikaal						Absoluut onmuzikaal						Totaal
	Meth. I		Meth. II.		Meth. III.		Meth. I		Meth. II		Meth. III		
	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	Aant.	%	
Mathematici . .	102	76	105	78	100	74	33	24	30	22	35	26	135
Physici.	145	84	153	89	139	81	27	16	19	11	33	19	172
Medici	135	82	139	84	127	77	30	18	26	16	38	23	165
Literatoren . . .	96	87	97	88	97	88	14	13	13	12	13	12	110
Totaal	478	82	494	85	463	80	104	18	88	15	119	20	582.

Methode I = Methode der ongelijke waardeering der positieve antwoorden.
„ II = „ „ minimum-eischen.
„ III = „ „ eigen beoordeeling.

C. *Eindresultaat.*

De vergelijking der door de 3 methoden verkregen resultaten, zooals tabel 8 ons toont, wijst uit, dat deze nòch van de methode nòch van de berekeningswijze afhangen.

Hoe men ook de antwoorden van onze medewerkers berekenen en classificeeren moge, men komt steeds tot hetzelfde resultaat, nl. dat de algemeen verbreide opvatting als zouden de mathematici in muzikaal opzicht op een gemiddeld hooger niveau staan dan de overige groepen van geestelijke arbeiders, op een dwaling berust. Hecht men aan de door ons statistisch geconstateerde verschillen binnen de 4 beroepen, resp. begaafdheidsgroepen gewicht, dan zijn de mathematici ten opzichte van de overige groepen in het nadeel. Wil men echter vanwege het relatief kleine aantal der onderzochte personen, hoewel zij het gros der Nederlandsche mathematici representeeren, aan deze verschillen geen bijzondere aandacht schenken — wat wetenschappelijk geoorloofd is — dan kunnen wij de 4 groepen wat hun gemiddelden muzikalen aanleg betreft, als *aequivalent* beschouwen.

Men kan een stap verder gaan en beweren, dat de *procentueele verdeeling van den muzikalen zin bij alle door ons onderzochte beroepsklassen met die van de geheele bevolking overeenstemt.* Volgens de opgaven van verschillende onderzoekers, o.a. Schüssler, bedraagt nl. het aantal onmuzikalen slechts ongeveer 15—20 % van de totale bevolking der beschaafde landen. Nu bleek het ook bij ons onderzoek, dat het percentage der absoluut onmuzikalen binnen deze grenzen ligt; wij kwamen nl. tot 18 %. Tot hetzelfde resultaat kwamen wij bij het bepalen van de percentages voor de beroepsgroepen afzonderlijk. Op een enkele uitzondering na ligt het niet hooger dan 20 %; bij de physici vonden wij 16 %, bij de medici 18 %, bij de literatoren 13 % en slechts bij de mathematici stijgt het percentage tot 24. Hieruit volgt, dat in Nederland de mathematici, physici, medici en literatoren gemiddeld even muzikaal zijn als alle andere groepen der bevolking.

Het zou in elk geval van veel belang zijn op grond van een massa-onderzoek een groot deel van de Nederlandsche bevolking, rekening houdend met de cultureele en sociale differentieering, op zijn muzikaliteit te onderzoeken en na te gaan, in hoeverre de hier geponeerde stelling met de werkelijke verhoudingen in overeenstemming is.

Of de hier medegedeelde resultaten op algemeene geldigheid aanspraak kunnen maken, kan men zonder vergelijkend onderzoek niet met zekerheid zeggen. Bij een bevolking met een in doorsnee hoogere muzikaliteit zal een verschuiving naar boven, bij een met

minder ontwikkelden muzikalen zin een verschuiving naar beneden plaats vinden. Dat de verdeeling der personen volgens den graad hunner muzikaliteit een ander beeld zou geven, is niet te verwachten. Dat geldt in het bijzonder voor de hoogere beroepsklassen, die in de beschaafde landen vrijwel dezelfde ontwikkelingsmogelijkheden hebben.

Uit het oogpunt van de psychologische begaafdheidsleer bezien, verdient dit onderzoek in zooverre bijzondere belangstelling, als gebleken is, dat de muzikale aanleg nòch met de andere soorten van begaafdheid, nòch met beroepseigenschappen van anderen aard volgens eenige wet verbonden is. Zij is een *erfbiologisch gefundeerde, individueele eigenschap, die aan een algemeene frequentiewet onderworpen is* en die in alle homogene en heterogene groepsverbanden, mits deze een voldoend aantal individuen omvatten, duidelijk aan den dag treedt.

D. *Bijzondere resultaten.*

I. *De verhouding tusschen den graad der mathematische begaafdheid en dien der muzikaliteit.*

Een der eerste vragen, die wij bij het bestudeeren van ons statistisch materiaal ontmoetten, was die aangaande de verhouding tusschen den *graad* der mathematische begaafdheid en dien der muzikaliteit. Kan hier een zekere wet opgemerkt worden of is, zooals wij het vermoedden, geen samenhang aan te toonen?

De bijzonder productieven hebben wij door bekende mathematici uit onze lijst laten selecteeren; zij vormen de eerste groep. De tweede trap van begaafdheid vormden de gepromoveerde mathematici, de derde groep wordt gevormd door de niet-gepromoveerden.

Het is gebleken, dat de geprononceerdheid van den muzikalen zin niet toeneemt met den graad der mathematische productiviteit, zooals duidelijk uit tabel 9 te zien is [1]).

[1]) Aan het kleine verschil tusschen productieven en gepromoveerden volgens de subjectieve methode kan men geen waarde hechten.

Tabel 9.

Mathematici		Objectieve methode		Subjectieve methode	
		muzikaal (5—25)	onmuzik. (0—4)	muzikaal (5—22)	onmuzik. (0—4)
Bijzonder productieven	45	56%	44%	78%	22%
Gepromoveerden . .	53	60%	40%	74%	26%
Niet-gepromoveerden .	37	50%	50%	65%	35%
Totaal	135	56%	44%	73%	27%

II. *De verhouding tusschen de begaafdheid voor natuurkunde resp. geneeskunde en de muzikaliteit.*

Bij de physici schijnt het alsof de minder productieven muzikaler zijn dan de productieven. Het aantal onderzochte personen is echter te klein, om hieruit conclusies aangaande een innerlijken samenhang te kunnen trekken, vooral ook, omdat een eenigermate bevredigende verklaring voor een dergelijken samenhang moeilijk te vinden is.

Tabel 10.

Physici		Objectieve methode		Subjectieve methode	
		muzikaal (5—22)	onmuzik. (0—4)	muzikaal (5—22)	onmuzik. (0—4)
Bijzonder productieven	59	59%	41%	73%	27%
Minder productieven .	113	72%	28%	83%	17%
Totaal	172	67%	33%	80%	20%

Wanneer men de zeer muzikalen apart neemt, ontdekt men bij de drie groepen een verschil, en wel in dien zin, dat in de eerste plaats de theoretische physici komen, in de tweede de experimenteele natuurkundigen en in de derde de onderzoekers, die in beide richtingen gelijkelijk werkzaam zijn. Dat blijkt ook bij een vergelijking der gemiddelden. Deze bedroegen bij de theoretici 1,52, bij de experimentatoren 1,42 en bij het mengtype 1,34.

De voorrang der mathematische physici kan natuurlijk niet door hun hoogeren mathematischen aanleg verklaard worden. Immers in dat geval zouden de mathematici als zoodanig een hooger percentage

bijzonder muzikaal aangelegde personen moeten uitwijzen dan inderdaad het geval is.

Ook met betrekking tot deze vraag moet men zich voorloopig tevreden stellen met het feit te constateeren en een verdere bevestiging van de resultaten afwachten.

Tenslotte vinden wij bij de *medici* in het geheel geen onderscheid tusschen den graad hunner productieve begaafdheid en muzikalen aanleg, zooals uit tabel 11 blijkt.

Tabel 11.

Medici		Objectieve methode		Subjectieve methode	
		muzikaal (5—22)	onmuzik. (0—4)	muzikaal (5—22)	onmuzik. (0—4)
Bijzonder productieven	55	58%	42%	75%	25%
Minder productieven .	110	59%	41%	76%	24%
Totaal	165	59%	41%	76%	24%

III. *Over de verbreiding der these aangaande de relatie tusschen mathematischen en muzikalen aanleg.*

In de inleiding hebben wij er reeds op gewezen, dat niet slechts vele niet-mathematici maar ook mathematici en physici van naam een verband tusschen mathematischen en muzikalen aanleg aannemen. De antwoorden op vraag 19 bevestigen, dat een groep mathematici en physici (27 % in totaal) inderdaad overtuigd zijn, dat er een dergelijk verband bestaat, dat zij dus ondanks het onvoldoende empirische materiaal, waarover zij beschikken, de door ons als onjuist aangetoonde opvatting met beslistheid toegedaan zijn. Men zou denken, dat die onderzoekers, die zich in positieven zin uitlieten in overgroote meerderheid zelf muzikaal zijn. Het bleek echter, dat er ook bij de niet-muzikale personen een niet onaanzienlijk aantal was, dat al evenzeer van een dergelijk verband overtuigd was.

Deze stelling schijnt dus een zoo domineerenden invloed uit te oefenen, dat zelfs menschen, die zich zelf als tegenbewijzen zouden kunnen aanvoeren, zich niet van haar suggestie kunnen emancipeeren en haar ondersteunen.

Dat de stelling in nauw verband staat tot de opvatting inzake het verband tusschen mathematica en muziek, blijkt daaruit, dat de

Tabel 12.

Mathematici en physici, die zich vóór een samenhang tusschen mathematische en muzikale begaafdheid uitspraken.

	van de zeer muzikalen	van de muzikalen	van de on-muzikalen
Mathematici	41%	37%	17%
Physici.	32%	25%	19%

vragen naar de verhouding tusschen de mathematische en muzikale begaafdheid en naar de verhouding tusschen mathematica en muziek beide steeds in gelijken zin beantwoord worden, dus òf beide positief òf beide negatief. Vraag 19 inzake de correlatie tusschen de beide soorten van begaafdheid werd in 27 %, vraag 18 inzake den samenhang der beide gebieden in 26 % der gevallen door een naar verhouding ongeveer gelijk aantal mathematici en physici positief beantwoord.

Vermeld dient te worden, dat bij de positieve beantwoording van vraag 20, die betrekking heeft op de belangstelling voor den mathematischen grondslag der muziek, de uitgesproken en zeer muzikaal aangelegde menschen een voorsprong hadden (38 %). De matig en middelmatig muzikalen gaven in 24 % der gevallen, de onmuzikalen toch nog in 15 % van belangstelling voor het probleem blijk.

IV. *Erfelijkheid van den muzikalen en mathematischen aanleg.*

Uit den gezichtshoek van ons probleem bezien interesseert ons in de eerste plaats de *erfelijkheid van den muzikalen aanleg* bij onze medewerkers, vooral bij de mathematici en physici. De erfbiologische literatuur heeft nu en dan van dergelijke verschijnselen melding gemaakt en zij heeft eenigszins praematuur een „biologische" verwantschap tusschen den muzikalen aanleg en philosophisch-mathematischen aangenomen. Wat de medewerkers bij onze enquête betreft, geeft de volgende tabel de gevallen aan, waarbij een overdracht van de vaderlijke of moederlijke erfmassa aangetoond kan worden.

In het meerendeel der gevallen schijnt de muzikale begaafdheid van den vader afkomstig te zijn. Dit is in overeenstemming met de resultaten door andere onderzoekers behaald (Haecker en Ziehen, Reibmayer, Feis).

Tabel 13.

	Aantal gevallen van erfelijkheid van muzikale begaafdheid	%
Mathematici	29	38
Physici	60	52
Medici	53	55
Literatoren	47	60
Totaal	189	51

Onze enquête heeft met betrekking tot het erfelijkheidsonderzoek een belangrijke, voor zoover ik weet nog niet bekende, regelmatigheid aan het licht gebracht. Het is nl. gebleken, dat er tusschen den *graad der muzikaliteit* en de erfelijkheid een niet vermoede samenhang bestaat; hoe grooter de muzikale aanleg, des te duidelijker blijkt het, dat het muzikaal prestatievermogen op een invloedrijke erfelijkheidsfactor gebaseerd is. Zoo konden wij bijv. bij de bijzonder muzikaal aangelegde mathematici de erfelijkheid in de helft (50 %) en bij de gemiddeld muzikalen in iets meer dan een derde (39 %) der gevallen aantoonen. Bij de andere beroepsgroepen vonden wij analoge verhoudingen. Daar deze regelmatigheid bij alle 4 groepen op ondubbelzinnige wijze te voorschijn kwam, is de nieuwe erfelijkheidsregel voldoende empirisch gefundeerd.

Tabel 14.

	Zeer muzikaal	Muzikaal
Mathematici	50%	39%
Physici	66%	43%
Medici	72%	47%
Literatoren	67%	58%
Gemiddeld	64%	45%

Het feit, dat de erfelijkheidsinvloeden bij alle vier groepen aan dezelfde frequentiewet onderworpen zijn, wijst erop, dat andere factoren, zooals bijv. milieu en traditie voor de ontwikkeling en manifestatie van den muzikalen aanleg van geen beslissende beteekenis zijn. Men zou anders moeten aannemen, dat deze sociologische

factoren bij alle vier groepen op volkomen dezelfde wijze werkzaam zijn geweest en hetzelfde effect teweeg gebracht hebben. Dat kan onmogelijk het geval geweest zijn. Het aandeel van de erfelijkheidsfactoren op het gebied der muzikale begaafdheid is dus veel hooger aan te slaan dan dat van het milieu en de traditie.

Onze enquête heeft verder waardevol materiaal voor het beantwoorden van de vraag inzake de *erfelijkheid van den mathematischen aanleg* opgeleverd. Van de door ons onderzochte mathematici en physici hebben 40 % de mathematische belangstelling resp. begaafdheid van hun ouders vermeld, terwijl wij bij de medici slechts in 24 % der gevallen een erfelijkheid van de mathematisch-natuurwetenschappelijke dispositie konden vaststellen. Deze constateering is in overeenstemming met de resultaten van het erfelijkheidsonderzoek, dat aan de hand van talrijke voorbeelden kon demonstreeren, dat de mathematische begaafdheid gedurende meer dan één generatie even manifest blijft als de muzikale. Volgens G a l t o n en M o e b i u s heeft men zeer vaak in de naaste of meer verwijderde bloedverwanten van eminente mathematici een geprononceerde mathematische begaafdheid kunnen aantoonen. Een bijzonder goed voorbeeld hiervan is de familie Bernoulli, wier leden gedurende drie generaties voortreffelijke mathematici en physici geweest zijn; zes van hen waren lid van de Fransche Academie. Al moge ook in dergelijke gevallen een samenloop van gunstige omstandigheden een niet onbelangrijke rol spelen, toch kan dit grootsche resultaat zonder erfelijkheid (van de zijde der ouders) niet verklaard worden.

In tegenstelling tot ons onderzoek van de erfelijkheid van den muzikalen aanleg hebben wij bij den mathematischen aanleg geen correlatie tusschen den graad van den aanleg en de medewerking der erfelijkheid kunnen aantoonen. Bij de productiefste mathematici was erfelijkheid in 33 %, bij de gepromoveerden in 30 % en bij de niet-gepromoveerden zelfs in 46 % der gevallen aan te toonen. De erfelijkheidsinvloeden schijnen dus bij bijzonder begaafde mathematici geen grootere rol te spelen dan bij de minder begaafden. Daaruit volgt, dat de ontwikkelingsmogelijkheid der mathematische begaafdheid in veel hoogere mate van de *individueele* gesteldheid van den geest afhangt dan de ontwikkelingsmogelijkheid van de muzikale begaafdheid. Bij de laatstgenoemde is de door erfelijkheid overgebrachte dispositie in staat een sterkeren invloed op de artistieke krachtsontplooiing van het individu uit te oefenen.

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. P. H. van Laer, *Vreemde woorden in de sterrenkunde.* Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1942. 108 bladz., *f* 2,25, geb. *f* 2,90.

Het werkje bevat: 1°. eene lijst van vreemde vaktermen in de sterrenkunde, met de hedendaagsche beteekenis en de taalkundige afleiding; hieraan zijn vele geschiedkundige opmerkingen verbonden; 2°. eene lijst der vreemde namen van sterrenbeelden en sterren, voorafgegaan door eene historische inleiding over den oorsprong van de sterrenbeelden en hunne namen; in de lijst zijn de sterrenbeelden alphabetisch gerangschikt, en bij ieder sterrenbeeld zijn de sterren opgenomen, die er toe behooren en een eigen naam hebben; 3°. de namen der planeten en hare manen, iets over de namen van enkele planetoïden en eene lijst van de figuren op de maan, de namen van een paar kometen en meteorenzwermen. Ten slotte eene lijst der Nederlandsche namen van de sterrenbeelden en een register op de behandelde vreemde namen van sterren, planetoïden, manen, enz.

De lectuur van dit boekje is mij zeer aangenaam geweest. Het bevat een zeer groot aantal bijzonderheden, die mij niet bekend waren, die hoogstwaarschijnlijk velen mijner collega's eveneens onbekend zullen zijn, en hun waarschijnlijk evenzeer zullen interesseeren als die bijzonderheden mijne belangstelling hebben. Zoo vermoed ik, dat de oorsprong van het woord „zenith" voor velen eene openbaring zal zijn. Ik kan dit boekje dan ook niet warm genoeg aanbevelen, zoowel aan leeraren in de cosmographie als aan belangstellenden in de sterrenkunde in het algemeen. Ook lijkt het mij bijzonder geschikt voor schoolbibliotheken, daar ik vermoed, dat de leerlingen onzer hoogere burgerscholen, gymnasia en lycea er gaarne in zullen lezen. J. H. S.

Dr. Fred. Schuh, *Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening. II. Differentiaalrekening.* Zutphen, W. J. Thieme & Cie, 1941, 337 bldz. Geb. *f* 11,50.

Het eerste deel van dit uitvoerige, in vier deelen ontworpen werk, is besproken in den vorigen jaargang (Euclides XVIII) op bladzijde 128. Het thans verschenen tweede deel bevat de differentiaalrekening in haar vollen omvang. De verschillende onderwerpen worden in korten stijl besproken, maar van alle kanten bezien. Telkens wordt de lezer getroffen doordat de schrijver bijzonderheden belicht, die bij de behandeling in verreweg de meeste boeken in het duister gehuld blijven. Men zie b.v. zijne bespreking van het theorema van de samengestelde functie, en de behandeling van het differentieeren met behulp van bewerkingssymbolen. Het boek is zeer aan te bevelen aan leeraren, die hunne kennis van eene of andere detailquaestie wenschen te verruimen. J. H. S.

MONDELINGE STAATSEXAMENS A 1942

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Zeist.

Evenals in 1940 wil ik ook nu beginnen met de opmerking, dat de hieronder volgende vraagstukken allerminst een volledige verzameling vormen van de op het Staatsexamen gestelde vragen. Zij zijn bedoeld als een aantal voorbeelden van meetkunde- en algebravragen, zoals die nu en in vorige jaren aan de A's gesteld zijn.

Aangezien deze vragen nu reeds verscheidene jaren zonder enig verder commentaar verschenen zijn, is het wellicht niet ondienstig er enige opmerkingen aan vooraf te laten gaan ter nadere oriëntering van de candidaten.

In de eerste plaats wil ik dan — zoals ik dat reeds in 1930 heb gedaan in het „Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" — aan de staatsexamencandidaten de ernstige raad geven kennis te nemen van de jaarlijkse verslagen, die de Staatscommissie publiceert en die in elke Openbare Leeszaal te verkrijgen zijn. Daarin toch geeft de Sub-Commissie voor de Wiskunde geregeld allerlei raadgevingen, door voorbeelden toegelicht, die van groot nut voor de belanghebbenden zijn, mits zij ter harte worden genomen.

Ook verdient het aanbeveling de vraagstukken door te werken onder leiding van bevoegde docenten. Als zodanig komen natuurlijk in de eerste plaats in aanmerking de leraren in de Wiskunde aan Gymnasia en Lycea, die met de eisen van het Gymnasiale eindexamen en dus ook met die voor het Staatsexamen volkomen op de hoogte zijn. Een dergelijke bevoegde leiding kan ook voorkomen, dat de wel eens geuite mening postvat, dat sommige vraagstukken eigenlijk veel te moeilijk zijn voor A-candidaten. Dit zou inderdaad wel eens het geval kunnen zijn, als het examen schriftelijk werd afgenomen en de examinandus geheel alleen, zonder hulp de vraagstukken moest maken. Maar dat is niet het geval. Er wordt, zowel voor Algebra als voor Meetkunde, een half uur *mondeling* geëxamineerd. Er is dus steeds een examinator aanwezig, die bij de moeilijker kwesties den candidaat op weg helpt en zo, al vragende,

onderzoekt of er behoorlijk gereageerd wordt en of voldoende theoretische kennis aanwezig is. Juist bij wat moeilijker vraagstukken kunnen gemakkelijk allerlei passende aanwijzingen worden gegeven, die den candidaat op streek brengen en tegelijk door zijn reactie daarop den examinator in staat stellen zich een behoorlijk oordeel over hem te vormen. Bovendien bestaat ook de mogelijkheid om tijdens het examen de voorgelegde problemen te wijzigen en te vereenvoudigen. Andererzijds zijn er natuurlijk ook genoeg vragen, die zo eenvoudig zijn, dat de candidaat ze direct moet kunnen beantwoorden.

Tenslotte zij nog opgemerkt, dat ditmaal de vraagstukken zo gerangschikt zijn, dat gelijksoortige opgaven bij elkaar staan.

I. MEETKUNDE.

A. *Stereometrie.*

1. Hoe construeert men een lijn, die twee kruisende lijnen *a* en *b* snijdt en twee andere kruisende lijnen *c* en *d* loodrecht kruist?
2. Gegeven twee elkaar snijdende lijnen *l* en *m*, een lijn *n*, die *l* en *m* kruist en een vlak V. Gevraagd een lijn *x* te construeren, die *l*, *m* en *n* snijdt en die evenwijdig is aan V.
3. Door een gegeven punt P een lijn *x* te construeren, die met twee gegeven kruisende lijnen *a* en *b* gelijke hoeken maakt en die een derde kruisende lijn snijdt.
4. Door hoeveel punten is een bol bepaald? Hoe vindt ge het middelpunt? Construeer het middelpunt van een bol, die door drie gegeven punten gaat en een gegeven lijn raakt.
5. Gegeven de punten A en B en de rechte *l* met daarop het punt C. Is een bol mogelijk, die door A en B gaat en de rechte *l* in C raakt?
6. Gegeven een bol en een rechte *a* buiten de bol. Construeer door *a* een vlak, dat het boloppervlak verdeelt in stukken, die zich verhouden als 2 : 3.
7. Gegeven de rechten *l* en *m* en daarop de punten A en B. Is er een bol, die *l* in A en *m* in B raakt?
8. Gegeven de punten A en B en het vlak V met daarin het punt C. Is er een bol mogelijk, die door A en B gaat en het vlak in C raakt? Aan welke voorwaarde moet het punt C voldoen?
9. Gegeven zijn een vlak V, een rechte *l* (niet in V) en de punten A en B (beide buiten V en niet op *l*). Men vraagt de con-

structie te beschrijven van een lijn, die door A gaat, *l* loodrecht kruist, en waarvan het snijpunt met V even ver van A als van B ligt.

10. Construeer een lijn, die twee gegeven lijnen *a* en *b* loodrecht kruist en verder een gegeven kegel- en boloppervlak raakt.

11. Van een viervlak D.ABC is het grondvlak ABC in ware grootte gegeven. Verder maken de ribben DA, DB en DC gelijke hoeken met het grondvlak. Indien nu verder de afstand van het hoekpunt A tot het vlak DBC in ware lengte gegeven is, construeer dan het netwerk van het viervlak.

12. Gegeven de kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$. Verleng DH met HP = ½ AB, DA met AQ = ½ AB en DC met CR = ½ AB. Teken de doorsnede van vlak PQR met de kubus en bewijs, dat dit een regelmatige zeshoek is. Hoe moet men de drie ribben bij D met een zelfde stuk verlengen, opdat het vlak de kubus slechts in één punt snijdt?
Construeer de afstand van AC en BG en bereken deze, als de ribbe van de kubus *a* is.

13. Van een afgeknotte vierzijdige pyramide is gegeven: het grondvlak ABCD in ware gedaante en de projectie op het grondvlak van de ribbe A_1B_1 van het bovenvlak, alsmede de hoogte. Maak de projectie van het bovenvlak af. Construeer vervolgens de ware gedaante van het opstaande zijvlak ABB_1A_1; daarbij de constructie verklaren met behulp van een ruimtefiguur.

14. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in ware gedaante en drie van de opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op drie van de opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

15. Construeer het netwerk van een vierzijdige pyramide, als het grondvlak een gegeven koordenvierhoek ABCD is en verder gegeven zijn de projectie van de top T op het grondvlak en de hoogte. Bewijs, dat de pyramide een omgeschreven bol heeft en construeer de straal van die bol.

16. Van een viervlak ABCD zijn in ware grootte gegeven: △ ABC, de ribbe AD en de hoogtelijn uit D op vlak ABC. Bovendien

kruisen AD en BC elkaar loodrecht. Construeer in ware grootte de hoek, waaronder AB en DC elkaar kruisen.

17. Op de ribben van een drievlakshoek met hoeken van 90° worden gegeven stukken OA, OB en OC afgepast. Beschrijf om de drievlakshoek met top A en ribben AO, AB en AC een rechte cirkelkegel; hoe vindt men de as hiervan? Construeer in ware grootte de halve tophoek.

18. Van een driezijdig prisma $\frac{DEF}{ABC}$ is gegeven: van het grondvlak ABC de straal R van de omgeschreven cirkel, de straal r van de ingeschreven cirkel en de zijde AB $= c$. Verder is $\angle$ DAB $= \angle$ DAC en DA $=$ DC. Construeer de hoogte, als ook nog de standhoek op AB gegeven is.

19. Op de kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ is een regelmatige vierzijdige pyramide TEFGH geplaatst. De punten P, Q, R, opv. op TE, op TG en in het vlak ABCD zijn gegeven. Construeer de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de kubus en met de pyramide.

20. Van viervlak D . ABC zijn gegeven: het grondvlak ABC in ware gedaante, de hoogte DD_1 en de projectie D_1 van de top D. Construeer in ware grootte de hoek, die AC met het vlak BDC maakt; eveneens de afstand tussen de kruisende lijnen DD_1 en BB_1 (BB_1 is de hoogtelijn uit B), de hoek tussen AC en BD en de afstand, waarop AC en BD elkaar kruisen.

21. In viervlak ABCD is AB $=$ CD, AD $=$ BC en AC $=$ BD. Bewijs, dat het zwaartepunt tevens het middelpunt is van de om- en van de ingeschreven bol.

22. Van een regelmatige n-zijdige pyramide vallen de middelpunten van de om- en de ingeschreven bol samen, als de hoeken der zijvlakken aan de top $\frac{360^\circ}{2n}$ zijn.

(Aanwijzing: Het middelpunt van de omgeschreven bol wordt gevonden als snijpunt van de „as" van het grondvlak en de „as" van een der opstaande zijvlakken).

23. In een regelmatig viervlak wordt een bol beschreven. Welk deel van de oppervlakte van de bol ziet men uit een hoekpunt?

24. Van viervlak $\frac{D}{ABC}$ zijn de ribben van het grondvlak AB $= 6$,

BC = 8, AC = 10 en zijn alle drie de opstaande ribben = 10. Bereken de afstanden, waarop telkens twee hoogtelijnen elkaar kruisen. (Aanwijzing: elk tweetal hoogtelijnen ligt in 2 evenwijdige standvlakken).

25. Van pyramide $\frac{T}{ABCD}$ is gegeven, dat alle ribben *a* zijn. Hoe volgt hieruit, dat de pyramide regelmatig is? Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven bol? We denken nu door T, A en B en door T, C en D twee elkaar rakende bollen gebracht. Wat is dus het raakpunt? Hoe kan men dus uit het ene middelpunt direct het andere vinden? Hoe kan men er voor zorgen, dat de ene bol een tweemaal zō grote oppervlakte heeft als de andere? Construeer deze laatste stralen, als de ribbe *a* gegeven is.

26. In het viervlak D . ABC brengt men een bol aan, die door A, B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC, als AD = 6, DB = 8, DC = 9 cm is? Noem de snijpunten met DB en DC opv. S en T. Bepaal de verhouding van de inhouden der delen, waarin het vlak AST het viervlak verdeelt. Neem L op AD en P op BC. Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.

27. Van een driezijdig prisma maken de opstaande ribben een hoek van 60° met het grondvlak. De loodrechte afstanden tussen die ribben zijn *a, b* en *c*. Bepaal de inhoud van het prisma, als er een bol in beschreven kan worden.

28. Van een regelmatige driezijdige pyramide maken de opstaande ribben (lengte *a*) hoeken van 60° met het grondvlak. Bereken de inhoud.

29. Van viervlak ABCD is AD = BD = CD = 13, AB = 6, BC = 8 en AC = 10. Bereken de inhoud en de straal van de omgeschreven bol.

30. In viervlak ABCD staan de ribben door A twee aan twee loodrecht op elkaar. Bepaal in een stereometrische figuur de ligging van het middelpunt M van de omgeschreven bol. Toon vervolgens aan, dat het snijpunt van AM met vlak BCD het zwaartepunt is van △ BCD.

31. Teken een regelmatige achthoek ABCDEFGH. Druk de zijde uit in R. Trek de diagonalen AF en BE. Men vouwt nu de trapezia AHGF en BCDE opv. om AF en BE om tot de lijnen

HG en CD samenvallen. Ten slotte sluit men de ruimte tussen deze trapezia en ABEF af door twee gelijkzijdige driehoeken. Druk de inhoud van het dus gevormde lichaam uit in R.

32. Van viervlak T . ABC kruisen TA en BC elkaar loodrecht, terwijl TA met de vlakken ABC en TBC gelijke hoeken maakt. De standhoek op de ribbe BC is 60°, TA $= a$ en BC $= b$. Bereken de inhoud van het viervlak.

33. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60°; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van het zijdelingse oppervlak van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120°. Bereken de inhoud van de pyramide, als de zijde van de ruit $= a$. Heeft de pyramide ook een ingeschreven bol? En ook een omgeschreven bol?

34. Van een viervlak ABCD is gegeven, dat AD en BC elkaar loodrecht kruisen. AB $=$ AC $= 13$; BC $= 10$; de hoek, die AD met het vlak ABC maakt is 60° en de standhoek op de ribbe BC is 45°. Bereken de inhoud van ABCD.

35. Van een afgeknotte n-zijdige pyramide hebben grond- en bovenvlak oppervlakten opv. van $4a$ en a cm². Men brengt een vlak aan, evenwijdig aan grond- en bovenvlak, op de helft van de hoogte. Bereken de oppervlakte van de doorsnede met de pyramide.

36. Van een afgeknotte n-zijdige pyramide is gegeven: oppervlakte bovenvlak B, oppervlakte grondvlak G, som der oppervlakten van de zijvlakken Z. In de afgeknotte pyramide kan een bol beschreven worden. Welke betrekking bestaat nu tussen B, G en Z? Ga na, welke lichaamsdiagonalen van een afgeknot 4-zijdig prisma elkaar altijd snijden en welke elkaar kunnen snijden.

37. Men brengt een bol aan door de hoekpunten A, B en C van het grondvlak van een viervlak en door een punt P op de opstaande ribbe AD. Het boloppervlak snijdt BD in Q en CD in R. Bewijs, dat vlak PQR evenwijdig aan zich zelf blijft, als P zich langs AD verplaatst.

38. Gegeven de regelmatige vierzijdige pyramide T . ABCD met hoogtelijn TE. Construeer het middelpunt van de omgeschreven bol van het lichaam TABE en bereken zijn straal, als de ribbe AB $= 10$ cm en de hoogte TE $= 8$ cm is.

39. Van een regelmatige pyramide $\frac{T}{ABCD}$ (AB $= a$) maken de opstaande zijvlakken hoeken van 60° met het grondvlak. Bereken de straal van de omgeschreven bol; eveneens die van de in- en aangeschreven bollen.

40. Van een vierzijdige pyramide T . ABCD is het grondvlak ABCD een trapezium met de evenwijdige zijden AD en BC. Door AD brengt men het vlak aan, dat de standhoek tussen TAD en ABCD middendoor deelt. Bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak de pyramide verdeelt, indien AD $= a$, BC $= b$, de afstand tussen AD en BC $= h$, en de hoogtelijn uit T op AD $= k$ is.

41. Gegeven viervlak ABCD. Op de ribben DB en DC kiest men twee punten P en Q zo, dat DP $= \frac{1}{3}$ DB en DQ $= \frac{3}{4}$ DC is. Op BC kiest men een punt R zo, dat BR $= \frac{1}{2}$ BC is. Bepaal de verhouding, waarin het vlak door PQ evenwijdig met DA een lijn uit R naar een willekeurig punt van DA verdeelt.

42. Uit elk der hoekpunten van een kubus met een ribbe van 12 cm zet men gelijke stukken op de ribben af. Door de uiteinden van elk drietal in één hoekpunt samenkomende stukken brengt men een plat vlak. Hierdoor worden 8 pyramiden afgesneden. Als het overblijvende lichaam een inhoud heeft van $^8/_9$ van de gehele kubus, bereken dan de lengte der uit de hoekpunten afgezette stukken.

43. Van een regelmatige vierzijdige pyramide is de opstaande ribbe $=$ 10 cm en de hoogte $=$ 8 cm. Bereken oppervlakte en inhoud van de omgeschreven bol, benevens de oppervlakte van het bolsegment, dat onder het grondvlak van de pyramide ligt.

44. Van een vierzijdige pyramide T ABCD is het volgende gegeven: vlak TAB $\perp$ vlak ABCD; ABCD is een parallelogram; TA $=$ TB $=$ 13, AB $=$ 10. De inhoud van TABCD $=$ 640. Bereken de afstand van AB tot TC.

45. Gegeven een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ (ribbe $= a$). Bereken de straal van de bol, die de drie zijden van drievlakshoek A . BDE raakt en tevens door G gaat.

46. In viervlak ABCD zijn Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 de zwaartepunten van

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud: P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.

Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen.

Verschijnt zes maal per jaar, abonnementsprijs *f* 6,30* per jaar. Prijs per nummer *f* 1,55*.

Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.

P 1037/4.